GAMMA

Galicia Matemática

Revista Galega de Educación Matemática

Nº 13 setembro 2014

AGAPEMA

Dirección
Sandra Sambade Nieto
Manuel Vilariño Freire
<gamma@agapema.org>

Consello de redacción
Gaspar M. Antelo Bernárdez
Julio Ferro Marra
Pilar García Agra
Marina Germiñas Miguéns
Esperanza Gesteira Losada*
Ignacio Larrosa Cañestro*
Manuel Pazos Crespo
Débora Pereiro Carbajo*
Marisol Pérez Blanco
Víctor Pollán Fernández
Xosé Enrique Pujales Martínez
Aia Rodríguez Somoza*
Julio Rodríguez Taboada
Roberto C. Santomé Varela
Enrique de la Torre Fernández*
Fernando Zacarías Maceiras*
**Grupo XeoDin*

Web
Manuel Vilariño Freire
<www.agapema.org>

Portada
Deseño:
Nuria Sambade Nieto
Imaxe:
Kelvin Tooth (Arte xenerativa)

Revisión lingüística parcial
María Miragaya Pereira

Maquetación
Sandra Sambade Nieto

AGAPEMA - Xunta Directiva

Presidente:
Julio Rodríguez Taboada

Secretario Xeral:
Julio Ferro Marra

Vicepresidenta:
Marisol Pérez Blanco

Tesoureira:
Marina Germiñas Miguéns

Vogal:
Pilar García Agra

Publicacións:
Sandra Sambade Nieto

Zona da Coruña, delegado:
Enrique de la Torre Fernández

Zona de Santiago, delegado:
José María Barca López

Zona de Lugo, delegado:
Manuel Vilariño Freire

Zona de Vigo-Pontevedra, delegada:
Julio Ferro Marra

Edita
AGAPEMA

Revista GAMMA
CPI dos Dices
Os Dices, s/n
15911 ROIS
Depósito legal: LU-310/01
ISSN: 1578-2980

ÍNDICE

1. EDITORIAL **5**

2. POR DEZ ANOS MÁIS **7**

3. COLABORACIÓNS **9**

Voronoi no Courel
Manuel Vilariño Freire . . . 10
Euler e a teoría de números
Ricardo Moreno Castillo . . . 16
O xogo do Mancala
Lucía Somoza Sampayo e Mercedes Sampayo Yáñez . . . 21
Eses números tan próximos
Jose María Barja Pérez . . . 28
Breve dicionario etimolóxico da matemática escolar (e IV)
Luis Puig Mosquera e Juan Blanco Rouco . . . 39
Unha experiencia e-Twinning de Matemáticas e ELE
Mª del Carmen Buitrón Pérez e Olga Martínez Cancelas . . . 52

4. SECCIÓNS **62**

PRENSAndo as Matemáticas
Mal estudante e fumador metido ao chou nun cadaleito
Xosé Enrique Pujales Martínez . . . 63
Blogosfera Matemática
Unha ollada incompleta
Manuel Vilariño Freire . . . 68
Matemáticas na 7ª arte
As matemáticas dos Simpson
Gaspar M. Antelo Bernárdez . . . 72
GeoGebra
Dúas pinceladas de GeoGebra cos polinomios na ESO
Fernando Zacarías Maceiras . . . 80
OriGamma
Cómo facer un muíño de papel (Papirohistoria para facer unha ra saltarina)
Roberto C. Santomé Varela . . . 94
Recensións Matemáticas
Para todas as idades
Víctor Pollán Fernández . . . 100

5. ACTIVIDADES **104**

XVI Olimpiada Matemática Galega para 2º da ESO . . . 105
XIV Rebumbio Matemático . . . 110
VIII Feira Matemática . . . 112
VI Congreso de Educación Matemática de AGAPEMA . . . 117
I Encontro de Educación Matemática para Infantil e Primaria . . . 120
Xornada sobre o Ensino da Estatística . . . 123

Léxico matemático galego en Secundaria 125
Seminario Federal: O papel das avaliacións na Educación Matemática 130
Seminario Federal: As competencias básicas agora 136
XXV Aniversario da FESPM 139

IN MEMORIAM **142**
Á nosa amiga Cova 143

Editorial

Dende o nacemento de AGAPEMA, no ano 2000, todos os que tivemos a honra de colaborar, en maior ou menor medida, no crecemento desta asociación coincidimos en que a revista *GAMMA* é un dos seus principais activos, pois esta publicación non só é un conxunto de artigos relacionados co ensino das Matemáticas, senón que representa o espírito da asociación. A paixón e a ilusión de todos os que traballamos nela están presentes en cada unha das partes que compoñen a revista. É por isto que para nós supón un logro extraordinario ser quen de facer chegar aos socios e socias de AGAPEMA un novo número de *GAMMA*, número que representa ademais o inicio dunha nova etapa, na que, como ocorre sempre cos cambios, hai elementos novos e outros que permanecen invariables.

Todos somos conscientes de que os cambios son complicados e que as novas etapas sempre levan consigo unha certa compoñente de incerteza, de inseguridade, como vivimos ao longo de todo o proceso de deseño e elaboración desta publicación que hoxe presentamos. Un novo equipo, un novo soporte, un novo deseño e ata un novo logotipo supoñen cambios importantes nunha publicación que en cada un dos números precedentes demostrou unha enorme calidade. Sendo así cabe pensar se tería sentido abordar estas modificacións, co risco que supón facelas nun elemento tan importante e tan consolidado, dentro de AGAPEMA e da educación matemática en xeral, como é a nosa revista. Pero tamén é certo que cando un novo equipo se pon á fronte dunha empresa como esta, resulta comprensible, e mesmo loable, que os obxectivos marcados non sexan soamente "copiar" o traballo do equipo anterior (excelente traballo, por certo), senón que supoñan a inclusión de novos elementos e da súa interpretación persoal do que debe ser unha publicación como esta.

A pesar de todos estes cambios, pensamos que os elementos máis importantes que caracterizaron a traxectoria de *GAMMA* ao longo destes anos permanecen presentes neste novo número da revista: a ilusión, o esforzo, a rigorosidade e o compromiso coa innovación e a educación matemática. Estas son características que fixeron da nosa revista un referente para o profesorado de Matemáticas de dentro e fóra de Galicia, e son as que se manteñen a pesar dos cambios de equipos, deseños e soportes. Estes ingredientes, sumados ao traballo dos autores e autoras de cada un dos artigos, seguirán a facer de *GAMMA* unha publicación cunha calidade que de seguro satisfará aos lectores máis esixentes.

Esta nova etapa da nosa revista coincide cunha época de cambios no ensino, coa posta en marcha dunha lei educativa que, mesmo antes de comezar a súa aplicación nas aulas, nace rodeada de conflitos: novos deseños curriculares, avaliacións externas, carga lectiva das diferentes materias, itinerarios na ESO, son aspectos moi controvertidos da LOMCE, sobre os que cómpre debater e posicionarse.
Dende AGAPEMA tentaremos contribuír á mellora da calidade da educación matemática dende os primeiros niveis, colaborando sempre que sexa posible coa administración educativa e con outras institucións para deseñar e elaborar propostas que permitan acadar ese obxectivo. Nesta liña se enmarca a participación da nosa asociación nos grupos de traballo da FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) para a análise e a proposta de deseños curriculares nas diferentes etapas educativas.
Por último, dende AGAPEMA queremos agradecer ao profesorado a súa participación en todas as actividades promovidas pola nosa sociedade, moitas delas reflectidas na revista, pois son eles e o seu alumnado os que dotan de sentido o noso traballo.

Por dez anos máis

Co título "Dez anos despois", Luis Puig facía reconto de dez anos de dirección de *GAMMA* e despedíase no anterior número da revista. Era o número 12. Era setembro do 2012. Dous anos despois (e non un, como era de esperar) sae á luz un novo número de *GAMMA*, o 13.

Este novo número ten como novidade principal o seu formato dixital. Esta será, seguramente, a maior vantaxe da revista e, á súa vez, a súa maior debilidade. Sabemos dende a dirección que a revista en papel era un "agarimo" aos socios e socias, pero agardamos que as vantaxes que supón este novo formato perdoen o cambio.

O primeiro que fixemos foi repensar a estrutura e dividir a revista en tres bloques principais: *Colaboracións*, *Seccións* e *Actividades*. No apartado *Colaboracións* atopamos os artigos propios dunha revista de investigación e divulgación. Tentamos que as temáticas destes artigos fosen o máis variadas posible. As *Seccións* serán fixas número tras número e están coordinadas por unha persoa ou un grupo de persoas. As temáticas das seccións van dende prensa a *GeoGebra* pasando polos blogs, libros, audiovisual e origami. Tamén quixemos ter un apartado no que dar visibilidade ao traballo que tanto profesorado como alumnado realiza dentro da asociación, e así naceu *Actividades*.

O novo soporte da revista permite que a cor chegue a *GAMMA* e ao seu novo logotipo, e fai tamén que o seu formato de dúas columnas se vexa reducido a unha, co fin de facer máis cómoda a lectura. Pero o gran cambio que incorpora o formato dixital é a inclusión de hipertexto. Atoparemos texto resaltado en distintas ocasións: para ir directamente a unha nota ao pé ou a unha referencia bibliográfica, para enlazar cunha páxina web á que fai referencia o texto e, quizais unha das máis útiles, para poder facer *clic* sobre o texto e abrir un arquivo de calquera tipo. Para que isto último funcione, a carpeta na que se atopan os arquivos debe estar sempre no mesmo lugar que o documento da revista.

Todos estes cambios veñen envoltos nun novo deseño, que agardamos faga da consulta de *GAMMA* unha experiencia máis agradable. Así mesmo, a posibilidade de poder abrir arquivos relacionados cun artigo nun só clic, pensamos que fai a lectura do mesmo máis rica e dinámica.

Con todo, os cambios nunca son fáciles, e non foron poucos os atrancos cos que nos atopamos ao longo desta viaxe de dous anos. Os problemas derivados do uso dun novo software, as decisións sobre os cambios de deseño, o traballo de comunicación coas persoas que colaboran na revista e, en definitiva, o comezo case de cero nunha tarefa que nunca antes levaramos a cabo, fixo que a revista se retrasase un ano. Este número representa o esforzo dun equipo por continuar coa calidade que *GAMMA* representa e aquí está para ser xulgado.

Non seriamos xustos se non agradecésemos os apoios que tivemos neste comezo. O de Luis Puig, como membro da anterior dirección, que nos asesorou facendo que mellorásemos moitos aspectos da revista. María Miragaya, sempre cunha boa palabra e disposta a revisar os artigos, independentemente do momento no que llos enviásemos. Víctor Pollán, traballador incansable sempre disposto a axudar e a buscar colaboracións. E, como non, a todos os que nos envían o seu traballo, que fan que o noso teña sentido e que son o celme da revista.

Agardamos ser dignos continuadores do anterior equipo e seguir sendo unha publicación de referencia na innovación e educación matemática galega.

SANDRA SAMBADE NIETO
Dirección de GAMMA

COLABORACIONS

Voronoi no Courel

MANUEL VILARIÑO FREIRE

Este artigo pretende achegar a unha aula de Secundaria os chamados Diagramas de Voronoi, unha ferramenta matemática moi usada na actualidade para a resolución de diferentes problemas. Desde a versión 4.0 do programa informático GeoGebra, a construción destes conxuntos está automatizada, polo que se abren moitas posibilidades para desenvolver actividades onde realicemos unha aplicación máis práctica de conceptos xerais de Xeometría.

Palabras chave: Voronoi, Courel, Secundaria, GeoGebra, Área de Influencia.

Voronoi at Courel

This paper aims to provide to a high school class of so-called Voronoi diagrams, a mathematical tool widely used today to solve different problems. Construction of these sets is automated since version 4.0 of software GeoGebra, which open many possibilities to develop activities which we'll make a more practical application of general concepts of Geometry.

Key words: Voronoi, Courel, High School, GeoGebra, Area of Influence.

PRIMACHORROS brancos
panqueixo i amarguexos!
Argana polos barrancos!
Folla podre nos reprexos!

Alguén está
niste aire da mañá.

Uxío Novoneyra
(Parada de Moreda 1930, Compostela 1999)

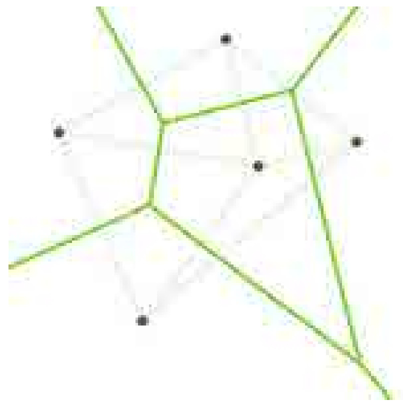
O poeta do Courel, homenaxeado nas Letras Galegas 2010, fai referencia nestes versos aos reprexos, que son as presas feitas nos soutos con terra e restos de fentos e maleza para reteren as castañas caídas.
E aquí é onde entran os diagramas de Voronoi.

Diagramas de Voronoi

Georgi Voronoi foi un matemático ruso de finais do S. XIX, especialista en fraccións continuas, que morreu con só 40 anos. Definiu os seguintes conxuntos que hoxe en día levan o seu nome.
Dados n puntos, dividimos o plano en n rexións formadas polos puntos que se encontran máis próximos a cada un deles que ao resto. Formalmente:

$$R_i = \{x / \parallel x - x_i \parallel \leqslant \parallel x - x_j \parallel \forall j = 1, 2, \cdots, n\}$$

$R_1, R_2, \dots, R_n$ constitúen unha teselación do plano, con "centros" nos puntos de partida, que é coñecida como Diagrama de Voronoi asociado a eses puntos. Podemos construír o diagrama trazando as mediatrices entre os segmentos que unen os puntos "próximos" dous a dous. As rexións delimitadas por estas mediatrices serán as rexións de Voronoi. Este concepto de proximidade, moi intuitivo, formalízase mediante as chamadas triangulacións de Delaunay. A idea é que, para simplificar a construción, só é necesario trazar as mediatrices entre os puntos que 3 a 3 estean nun círculo sen outro punto no seu interior.



Imaxe 1: Diagrama de Voronoi asociado a 5 puntos

Os programas informáticos clásicos de matemática computacional como *MatLab* ou *Mathematica* teñen implementado o algoritmo de construción dos conxuntos de Voronoi a partir dos seus centros. Tamén os software de tratamento dixital de imaxes como *Gimp* ou *Photoshop* utilizan filtros para reproducir o efecto destes diagramas. Porén, o recurso máis atractivo para o profesorado de primaria e secundaria chegou coa versión 4.0 de *GeoGebra* e o seu comando *Voronoi*[ ], que será utilizado en todas as imaxes deste artigo.

Algúns exemplos previos

Na natureza aparecen multitude de divisións modelables por diagramas de Voronoi. Trátase en xeral de puntos concretos de acumulación de humidade, frío, calor, etc. que modifican a xeometría, textura ou cor dunha determinada rexión próxima. A pel dalgúns animais, follas, terreos moi secos ou en desxeo, presentan estas formas. Nas *XVI JAEM* celebradas en Palma de Mallorca en xullo de 2013, o artista **Cristóbal Vila** impartiu unha memorable conferencia plenaria titulada *Matemáticas e Animación 3D*. Confesou que a última secuencia da súa obra *Nature by Numbers* estaba inspirada nun artigo dun blog sobre cultura xaponesa que explicaba a construción dos conxuntos de Voronoi. As ás desa espectacular libélula mostrada nesta obra están teseladas cun diagrama deste tipo.

No entanto, nós ficaremos cunha das aplicacións máis sinxelas desta clase de conxuntos. Estudaremos a construción de áreas de influencia para a prestación de determinados servizos, unha das funcións máis básicas incluídas nos Sistemas de Información Xeográfica (GIS).

Na parte técnica utilizaremos mapas e planos obtidos directamente da internet ou de ferramentas tipo *Visor SixPac* e *Google Maps*. As construcións matemáticas serán cousa de *GeoGebra* e, aínda que non é necesario, o retocado final, de *Gimp*. Os resultados non teñen ningún valor operativo, só pretendemos achegalos como curiosidade para visualizar os diagramas de Voronoi nun contexto próximo e accesible nas aulas.

Para compoñer os mapas, primeiro procuramos a imaxe (ou "pantallazo" de *Google Maps*) na rede e descargámola no disco. Abrimos *GeoGebra* e, premendo en "inserir imaxe", recuperamos o ficheiro descargado. Sobre a imaxe de fondo, identificamos os puntos sobre os que construiremos o diagrama. Executamos o comando *Voronoi[Puntos]*. Gardamos a zona gráfica como imaxe e retocamos e coloreamos nun *software* tipo *Gimp*. De querer saltar este último paso, podemos elaborar un bo acabado final utilizando só *GeoGebra*. Para isto, habería que repasar con polígonos todas as rexións de Voronoi e despois, un a un, revisar as cores, opacidades, tramas, grosor das liñas, ...

Zonas de escolaridade

Comezaremos no eido local, cun plano da cidade de Lugo. Trátase de resolver o problema que se presenta ano tras ano, para delimitar as zonas nas que se reparte o alumnado de 3 anos no procedemento de acceso á escolaridade. En Lugo hai 13 centros educativos públicos para unha área de 92.000 habitantes. Para asignar cada futuro estudante ao seu centro utilizaremos un único criterio de cercanía, é dicir, a cada un lle corresponde o centro que lle queda máis cerca.

Para que o reparto sexa equilibrado deberiamos supoñer que todas as zonas teñen unha densidade de poboación infantil similar e que todos os centros ofertan o mesmo número de prazas. Como isto non acontece na realidade, deberiamos utilizar un modelo de diagrama de Voronoi con pesos, afectando cada centro pola densidade do barrio e polo número de prazas ofertadas. Ou dunha maneira menos elaborada, aplicar homotecias para corrixir as rexións desproporcionadamente grandes ou pequenas.

Trátase pois dunha simplificación que dá como resultado a seguinte distribución:

Imaxe 2: Zonas de Escolaridade da Cidade de Lugo

Dáse o caso do colexio público que oferta menos prazas en Infantil. É o CEIP Quiroga Ballesteros, que abrangue unha área moi ampla e moi poboada. De feito, a veciñanza da zona histórica de Lugo vén desde hai tempo mobilizándose para esixir un novo centro público nesta zona da cidade. Este Diagrama de Voronoi é un argumento moi forte ao seu favor.

A continuación veremos dous exemplos sobre a área de influencia que abranguen as 7 cidades galegas (Vigo, A Coruña, Ourense, Lugo, Santiago, Pontevedra e Ferrol) e as 19 cidades de máis de 200.000 habitantes da Península Ibérica.

Área de influencia das 7 cidades galegas

Imaxe 3: Área de Influencia das 7 Cidades Galegas

Este mapa dá para desenvolver unha actividade completa en Secundaria: dividimos a clase en 7 grupos, cada un no goberno da "súa" cidade. Teñen que distribuír os fondos europeos e precisan buscar argumentos para poder captalos. Un cálculo que necesitarán facer todos será a poboación e superficie que abrangue cada conxunto e, a partir de aí, discutir. Tamén terán que repartir a poboación de determinados concellos, así que pode dar moito xogo.

Área de influencia das 19 grandes urbes peninsulares

Este é o diagrama de Voronoi da Península Ibérica centrado nas 19 cidades de máis de 200.000 habitantes.

Dividir a clase en 19 grupos como fixemos no caso anterior coas 7 rexións non parece moi factible, ademais de que os cálculos se complican demasiado. Non obstante, podemos facer 4 ou 5 grupos, no que cada un que teña asignado un sector peninsular, e preguntarnos en que lugar unha importante empresa debería instalar unha grande central loxística e de transportes para dar servizo a toda a Península. Poderiamos aproveitar o diagrama para deseñar os percorridos dun tren entre dous puntos lonxanos da península de maneira que ningún núcleo grande de poboación saia prexudicado. Este problema de optimización de rutas é unha das aplicacións máis comúns dos Diagramas de Voronoi.

Imaxe 4: Área de Influencia das 19 Grandes Urbes Peninsulares

A propiedade das castañas caídas no Courel

No comezo deste artigo falabamos dos "reprexos", os relevos que os courelaos e as courelás construían para delimitar a propiedade das castañas caídas. No Courel, como en toda Galicia, as castañas constituíron parte fundamental da dieta durante séculos, ata que se foron consolidando os novos cultivos chegados de América. Porén, continúan hoxe en día a ser un produto de grande importancia gastronómica, cultural e turística. Un roteiro polos seus magníficos soutos en calquera época do ano, mais sobre todo en outono, é unha das experiencias naturais máis completas que se poden ter no noso País.

Entre os usos e costumes da Serra do Courel figura que as castañas non pertencen ao propietario da finca onde caen, senón que son do castiñeiro do que caeron. E isto introduce unha nova maneira de distribuír o terreo. Vexámolo cun exemplo:

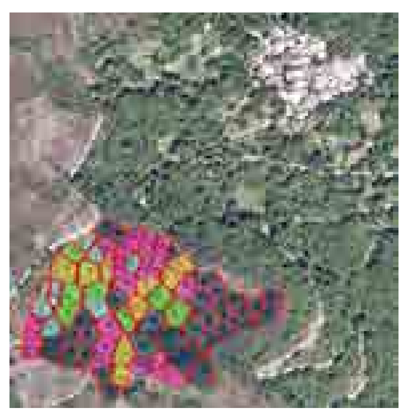
Imaxe 5: Delimitación dun Terreo (SixPac)

Imaxe 6: Plantación Simulada de Castiñeiros

Un dos lugares míticos do Courel é o Val das Mouras que se encontra ao pé da aldea de Mercurín. Na figura da esquerda podemos ver unha imaxe deste lugar obtida do Visor SixPac, coa división en parcelas dun terreo ermo na parte inferior esquerda. Esta ferramenta inclúe a posibilidade de amosar os límites das parcelas que conforman o terreo. É o caso das liñas vermellas que delimitan unha zona que se encontra preto da aldea (figura 5). Trátase dunha distribución minifundista moi característica de Galicia. Supoñamos que os veciños de Mercurín teñen plantado un souto de castiñeiros sobre este terreo (figura 6). Simulamos esta plantación separando os castiñeiros algo máis do normal para que fique máis clara a distribución. Cando chegue o outono e comecen a caer as castañas, a distribución achegada polo SixPac non nos vai valer para identificar o seu propietario. Necesitamos outro diagrama centrado en cada castiñeiro, no que cada rexión delimite a que árbore pertence cada castaña do chan. Este é un diagrama de Voronoi.

Nesta composición, fomos agrupando (pintando da mesma cor) os castiñeiros que pertencían a cada parcela. Deste xeito os límites das fincas (SixPac) non corresponden directamente cos límites da propiedade das castañas caídas.

Así pois, e como conclusión, de darse o caso, esperemos que non, de que dous veciños do Courel concorran nunha disputa xudicial pola propiedade das castañas do chan, o xuíz ou xuíza vai ter que chamar como perito a alguén que saiba de matemáticas. Pero non lle vale un calquera. Necesita alguén que saiba algo sobre conxuntos de Voronoi.



Imaxe 7: Diagrama de Voronoi no Souto

Referencias

Bibliográficas

[1] U. Novoneyra, *Os Eidos. O Libro do Courel*, Edicións Xerais, 2010 (1955 Orixinal).

En internet

[2] H. García, *Blog Kirainet*, http://www.kirainet.com/delaunay-y-voronoi/

[3] C. Grima, *Blog Naukas*,
http://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/

MANUEL VILARIÑO FREIRE
IES Perdouro - Burela
<mvilarinho@edu.xunta.es>
@vilagz

Euler e a teoría de números

RICARDO MORENO CASTILLO

Este traballo está dedicado a expoñer moi someramente algunhas das aportacións de Euler no campo da teoría de números.

Palabras chave: Euler, Teoría de números.

Euler and number theory
This work concisely sets out some of the Euler's contributions in the field of Number Theory.

Key words: Euler, Number theory.

Euler, algúns datos biográficos

Na cidade suiza de Basilea, no ano 1707, chegou ao mundo Leonhard Euler, un dos máis importantes matemáticos da historia e, sen lugar a dúbidas, o máis prolífico. A súa bibliografía consta de 886 títulos, e a súa produción científica supuxo unha media dunhas 800 páxinas anuais. Seu pai, un pastor calvinista, esperaba que o fillo seguise o mesmo camiño, pero na universidade de Basilea tivo ocasión de tratar a Johann Bernoulli (1667-1748), e este encontro foi decisivo para decantarse polas Matemáticas. Aos vinte e tres anos incorporouse á Academia de San Petersburgo, fundada pola emperatriz Catalina I, e dende entón a revista da Academia foi publicando traballos de Euler, un tras outro, ata cincuenta anos despois da súa morte. En 1741 aceptou unha invitación de Federico, *o Grande* para formar parte da Academia de Berlín, pero a estancia en Prusia non foi demasiado feliz, e en 1766 volveu a Rusia. A partir de 1771 quedou completamente cego, pero esta circunstancia no interrompeu o ritmo das súas publicacións. Morreu repentinamente en 1783, á idade de setenta e seis anos. Laplace dicía con frecuencia: "Lede a Euler, lede a Euler, el é o mestre de todos nós". Non cabe mellor homenaxe.
Euler tocou case todos os rexistros da Matemática, e non hai ningunha rama dela na que non estea a súa pegada. A continuación veremos algúns dos seus descubrimentos na teoría de números.

Un problema da *Aritmética* de Diofanto

O problema 9 do libro II da *Aritmética* de Diofanto propón o seguinte. Dado un número racional que é suma de dous cadrados, encontrar outra expresión dese número como suma doutros dous cadrados. Euler demostrou que o problema ten infinitas solucións. En efecto, sexa $c = a^2 + b^2$, trátase de atopar todas as solucións da ecuación $c = x^2 + y^2$. Facemos $x = a + mu$ e $y = b - nu$, e chegamos ao seguinte:

$$u = \frac{2(bn - am)}{m^2 + n^2}.$$

Disto dedúcense facilmente todas as solucións do problema:

$$x = \frac{2bmn + a(n^2 - m^2)}{m^2 + n^2},$$
$$y = \frac{2amn + b(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}.$$

Con estas fórmulas podemos fabricar todas as solucións. Se collemos o caso concreto $13 = 2^2 + 3^3$ (que é o que aparece na *Aritmética*) estes son algúns dos valores posibles para x e y:

m	n	x	y
2	1	6/5	17/5
3	1	1/5	18/5
4	1	6/17	61/17
5	2	18/29	103/29
7	3	23/29	102/29

As ecuacións lineais

É cousa sabida que unha ecuación diofántica linear $ax + by = c$ ten solución se o máximo común divisor dos coeficientes a e b divide ao termo independente c. Por esta razón, sempre podemos imaxinar, sen merma ningunha de xeneralidade, que a e b son primos entre si. Tamén se sabía dende hai moito que, se temos unha solución $x = \alpha$ e $y = \beta$, temos infinitas, e ademais fáciles de encontrar: para calquera valor enteiro de t, os números $x = \alpha + bt$ e $y = \beta - at$ son unha nova solución. O que xa non é cousa tan trivial, se a e b son un pouco grandes, é atopar a primeira, a que permite dar con todas as demais. Euler descubriu un procedemento para calculala, consistente en despexar a incógnita de menor coeficiente, extraer despois da fracción a maior parte enteira, e fabricar co resto unha nova ecuación máis simple cá inicial. Imos ilustrar isto mediante un exemplo. Pensemos na ecuación $315x + 22y = 16$. A incógnita que leva o coeficiente menor é o y. Entón:

$$y = \frac{16 - 315x}{22} = \frac{16 - 7x}{22} - 14x.$$

Facemos $(16 - 7x)/22 = u$, e temos a ecuación $7x + 22u = 16$, e reiteramos o procedemento:

$$x = \frac{16 - 22u}{7} = \frac{2 - u}{7} + 2 - 3u.$$

Facemos $(2 - u)/7 = v$ e chegamos á ecuación $u + 7v = 2$. Se facemos (por exemplo) $v = 0$, temos que $u = 2$, $x = -4$ e $y = 58$.

Sobre a cantidade de números menores ca un número dado que son primos con el

Inspirándose na criba de Eratóstenes, Euler ideou un método para saber, dado un número n, cantos números hai menores que n que sexan primos con el. Consideremos a seguinte función entre números enteiros:

$$\varphi(n) = \text{cantidade de números} \leqslant n \, (\text{que sexan primos con } n)$$

Sexa $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a descomposición de n en factores primos. Da sucesión $\{1, 2, \dots, n\}$ eliminamos todos os números divisibles por p_1, que son en total n/p_1, e quedan $n - n/p_1$. De entre eles tachamos os múltiplos de p_2, que son $(n - n/p_1)/p_2$, e calculamos cantos quedan:

$$n - \frac{n}{p_1} - \frac{n - n/p_1}{p_2} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

Reiterando o razoamento ata chegar a p_k, temos a fórmula:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Por exemplo, se para $n = 100$, como $100 = 2^2 \times 5^2$, temos que:

$$\varphi(100) = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 40$$

Outro exemplo: $333{,}333 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, logo:

$$\varphi(333\,333) = 333\,333\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{37}\right) = 155\,520$$

A infinitude dos números primos

Xa sabemos dende Euclides (proposición 20 do libro X dos *Elementos*) que hai infinitos números primos. Euler demostrou isto utilizando series infinitas, dando así os primeiros pasos na teoría analítica de números. Para cada primo p considerou a igualdade:

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots$$

Despois, multiplicou membro a membro todas as igualdades así obtidas. Cada sumando do segundo membro do produto é o inverso dun produto de potencias de números primos, e como todo número enteiro n é un produto de potencias de números primos, sucede o seguinte:

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Se o número de primos fose finito, o produto da esquerda tamén sería finito, e a a serie da dereita converxería. Pero sabemos (xa dende o século XIV) que non é así.

Os números congruentes

Para un mellor entendemento do que segue, convén falar algo de números *congruentes*. Dous números enteiros a e b son congruentes respecto doutro enteiro m se a súa diferenza é múltiplo de m (ou o que é igual, se dan idéntico resto ao seren divididos entre m). Isto escríbese desta maneira: $a \equiv b \pmod m$. O máis pequeno número positivo congruente con a respecto de m chámase o resto de a en relación a m, e é xustamente o resto de dividir a por m. As congruencias conservan as operacións aritméticas. Isto quere dicir que se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, tamén sucede que $a + c \equiv b + d \pmod m$ e $ac \equiv bd \pmod m$. O concepto de número congruente non foi definido dun modo explícito ata o século XVIII, pero foi tacitamente utilizado dende moito antes. Esta maneira de comportarse as congruencias, case como se fosen igualdades (poden ser sumadas e multiplicadas membro a membro), permite crear unha álxebra que, en certas cousas, parécese á álxebra tradicional, pero que noutras difire claramente dela. Pensemos na ecuación $x^2 \equiv 3 \pmod{11}$. Os números 5 e 6 cumpren a ecuación, logo son solucións. Agora ben, os números 16, 27, 38, ... , tamén a cumpren, pero como son congruentes entre si e con 5, non se consideran soluciones distintas del. O mesmo sucede cos números 17, 28, 39, ... , que son congruentes con 6. En cambio, 5 e 6 si son solucións distintas porque non son congruentes. Curiosamente, dicir que a ecuación teña solucións equivale a dicir que o 3, que como número enteiro carece de raíz cadrada, na álxebra das congruencias módulo 11 si que a ten.

Non é esta a única cousa chamativa que sucede coas congruencias. Por exemplo, a ecuación $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ ten como solucións a 1, 3, 5 e 7, catro solucións distintas (enténdase: non congruentes) para una ecuación de segundo grao. O teorema fundamental da álxebra clásica, segundo o cal o número de solucións dunha ecuación non pode exceder o grao desta, non sempre funciona na álxebra de congruencias.

Euler e as conxecturas de Fermat

Entre as conxecturas que Fermat deixou abertas, están as tres seguintes: todo número da forma $2^{2^n} + 1$ é primo, a ecuación $x^n + y^n = z^n$ (con $n \geqslant 3$) non ten solución entre os números enteiros, e para todo primo p e todo número enteiro a non divisible por p sucede que $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ (este último resultado chámase *o pequeno teorema de Fermat*). Euler demostrou a terceira; a segunda, no caso particular $n = 3$, e refutou a primeira. Poñendo en xogo a súa incrible habilidade para o cálculo, chegou á descomposición:

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 6\,700\,417 \times 641$$

Hoxe sabemos que para $5 \leqslant n \leqslant 16$, o número $2^{2^n} + 1$ é composto, e non se sabe de máis primos de Fermat despois dos cinco primeiros. Algúns matemáticos opinan (aínda que non está demostrado) que eses cinco son os únicos que hai.

Unha ampliación do pequeno teorema de Fermat

Xa se falou da función, introducida por Euler, que asigna a cada número n outro número $\varphi(n)$ igual á cantidade de números primos con n que hai por debaixo del. Esta cantidade foi chamada por Édouard Lucas, un matemático francés que viviu entre os anos 1842 e 1891, o *indicador de n*. Pois ben, Euler demostrou que se n é primo con a, entón $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\text{mod } n)$. De aquí sae, como caso particular, o pequeno teorema de Fermat, porque se p é un número primo, $\varphi(p) = p - 1$.

Non se entrará na demostración, pero si se comprobará nun caso concreto, por exemplo con $a = 23$ e $n = 100$ (e xa sabemos que $\varphi(100) = 40$):

$$23^2 \equiv 29(\text{mod } 100)$$

$$23^4 \equiv 29^2 \equiv 41(\text{mod } 100)$$

$$23^8 \equiv 41^2 \equiv 81 (\text{mod } 100)$$
$$23^{16} \equiv 81^2 \equiv 61 (\text{mod } 100)$$
$$23^{32} \equiv 61^2 \equiv 21 (\text{mod } 100)$$

Como $81 \times 21 \equiv 1(\text{mod } 100)$, multiplicamos as congruencias terceira e quinta, e temos que $23^{40} \equiv 1(\text{mod}100)$.

Este resultado é útil para resolver certas ecuacións de congruencia. Supoñamos que a é un número primo con n, e interesa resolver a ecuación:

$$ax \equiv b(\text{mod } n)$$

Entón a solución é o número $x = ba^{\varphi(n)-1}$ (e por suposto, calquera outro número congruente con el módulo n):

$$aba^{\varphi(n)-1} - b = b(a^{\varphi(n)} - 1) = \text{múltiplo de } n$$

Para ilustrar o procedemento, resolverase a ecuación $13x \equiv 7(\text{mod } 25)$. Como $\varphi(25) = 20$, unha solución é $x = 7 \times 13^{19}$, pero convén encontrar a máis pequena:

$$13 \equiv 13(\text{mod } 25)$$
$$13^2 \equiv 19(\text{mod } 25)$$
$$13^4 \equiv 19^2 \equiv 11(\text{mod } 25)$$
$$13^8 \equiv 11^2 \equiv 21(\text{mod } 25)$$
$$13^{16} \equiv 21^2 \equiv 16(\text{mod } 25)$$

Multiplicamos a primeira, a segunda e a última, e temos que $13^{19} \equiv 2(\text{mod } 25)$, logo $7 \times 13^{19} \equiv 14(\text{mod } 25)$, e 14 é a menor solución.

Referencias bibliográficas

[1] C. Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[2] Diofanto, *La Aritmética y el libro sobre los números poligonales*, Editorial Nivola, Madrid, 2007.

[3] W. Dunham, *Euler. El maestro de todos los matemáticos*, Editorial Nivola, Madrid, 2000.

[4] R. Moreno, *Historia de la teoría elemental de números*, Editorial Nivola, Madrid, 2013.

RICARDO MORENO CASTILLO
Catedrático de instituto xubilado
<moreno_castillo@hotmail.es>

O xogo do Mancala

LUCÍA SOMOZA SAMPAYO
MERCEDES SAMPAYO YÁÑEZ

Este artigo é un esbozo histórico-antropolóxico dunha variante dun dos xogos de taboleiro máis antigos do mundo, o xogo do Mancala.

Palabras chave: Mancala, xogo, interxeracional, escravos, etnias, caoríes, Ganvie.

O xogo do Mancala
This article is a historic-anthropology sketch of a variant of one of the most ancient board games in the world, Mancala´s game.

Key words: Mancala, game, intergenerational, slaves, ethnic group, caoríes, Ganvie.

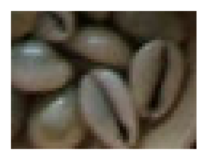
O desencadeante deste artigo sobre o xogo do Mancala foi a lembranza dunha viaxe en novembro de 2006 á República de Benín que trouxo á memoria a escena dun grupo de nenos que á saída da escola se reunía coas persoas maiores nas rúas da cidade beninesa de Banamé para xogar ao *Ajì*, unha das múltiples variantes do xogo do Mancala. Nas imaxes tomadas nesa viaxe pódese constatar a diferenza de idade e a sintonía dos xogadores diante do taboleiro.
En diversas Feiras Matemáticas, celebradas arredor do 12 de maio na cidade de A Coruña co gallo do Día Escolar de Matemáticas, o alumnado do IES Eusebio da Guarda presentaba, entre as súas actividades, a do Xogo do Mancala. Dita actividade consistía en amosar unha exposición de taboleiros do xogo Mancala coas súas sementes respectivas, a maioría estaban feitos artesanalmente con envases de iogur, moldes de magdalenas, oveiras...; as sementes ou *ajikwin* eran da máis diversa orixe, ían dende froitos secos, bólas de cristal, abelorios, cantos rodados, *caoríes*, que son unhas cunchas de molusco usadas como moeda de cambio nos países africanos ata o século XIX.

Imaxe 1: Rúa de Gbanamé, novembro de 2006

Explicábanse as regras do xogo facendo fincapé en que é un xogo de integración social, bipersoal, de estratexia e equitativo, xa que a ganancia dun xogador implicaría a perda do contrincante, pola contra, non se considera un xogo aleatorio posto que a información é completa. Por último, convidábase a botar unha partida ás persoas que se acercaban polo posto. Simultaneamente visualizábase unha presentación de Power-Point sobre o país de Benín con fotos da citada viaxe que remataba cunha explicación da forma de xogar do *Ajì*.

(a) Mancalas artesanais

(b) Sementes



(c) Caoríes

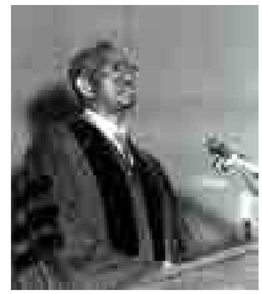
Imaxe 2: Compoñentes dun Mancala

O xogo do Mancala na Historia da civilización

O xogo do Mancala xunto ao xogo do xadrez están considerados como os primeiros xogos de mesa dos que se ten noticia na historia dos tempos. Conxectúrase que o primeiro xogo de mesa é o Xogo Real de Ur, atopado en 1920 por Sir Leonard Wooley nas Tumbas Reais de Ur, descoñécese o seu regulamento. Está formado por dúas táboas e a súa antigüidade supera os 4600 anos. Na actualidade este taboleiro atópase no British Museum.

Aínda que os historiadores non se poñen de acordo sobre a antigüidade do Mancala, hai testemuños gravados na pedra dos templos e edificios públicos de Sumeria e de Exipto de taboleiros que ben puidesen ser do Mancala, datados cara ao 1400 a.C. Outros son da opinión de que estes taboleiros non eran para fins lúdicos, senón para levar a contabilidade ou facer inventarios, tamén se di que podían ser soportes utilizados pola nobreza para facer ofrendas aos deuses. Outras fontes manifestan que o taboleiro máis antigo pertence á época minoica por estar datado no século XVIII a.C, foi atopado en Creta. Os historiadores móstranse unánimes ao afirmar que o primeiro taboleiro dun xogo do Mancala, que se pode considerar como tal, apareceu en Etiopía e é do século VII.

O prestixioso historiador e científico senegalés Cheikh Anta Diop (1923-1983), especialista mundial en xogos Mancala, defendía a teoría de que os primeiros Mancalas xurdiron na zona do Golfo de Guinea e que pola transmisión oral o xogo foise modificando, de aí as súas distintas variedades. Os comerciantes árabes levaron o Mancala ao Oriente Medio, expandíndose polo sur e centro de Asia. Especúlase que a palabra Mancala pode provir da fusión de palabras do árabe clásico e do swahili falado nas costas occidentais de África. Outras teorías afirman que o Mancala xa era coñecido na península arábiga.

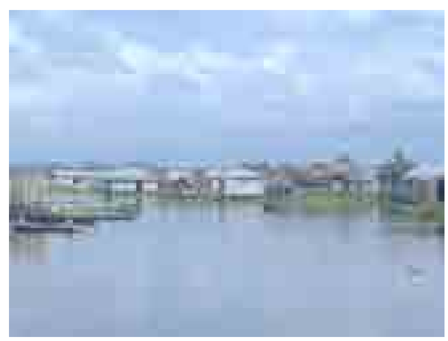


Imaxe 3: Cheikh Anta Diop

A transmisión do Mancala ao continente americano foi obra dos negros que eran vendidos como escravos, ata ben entrado o século XIX, para traballar nas plantacións de azucre. Na actualidade o xeito de xogar dos habitantes dalgúns lugares de América é un sinal de identidade que permite saber a orixe dos seus antepasados.

O país de Benín non se viu libre da lacra da escravitude, unha proba é a cidade de Ganvie, coñecida como a "Venecia africana". É a cidade lacustre máis grande de África, está asentada no lago Nokouek e foi construída polos *toffis* a principios do século XIII. Cando os guerreiros *fon* eran enviados pola realeza para a captura dos habitantes das zonas rurais e a súa venda posterior no comercio de escravos, as xentes de Ganvie trasladaron as súas vivendas ao lago, xa que as tradicións relixiosas do país impedían que os ataques tivesen lugar sobre a auga. É por iso que *Ganvié*, na lingua *toffi*, significa "Comunidade Salvada".

Imaxe 4: Benín



Imaxe 5: Ganvie, coñecida como a "Venecia africana"

Ademais dos *toffi* e *fon*, outra etnia importante nese país é a dos *yoruba*. A cidade de Ketou situada ao sueste de Benín, próxima a Nixeria, está considerada como a capital dos *yoruba* en Benín. Existe a crenza de que os *yoruba* proceden de Exipto, o seu xefe espiritual é o *Oba*, cando concede audiencia hai que descalzarse e axeonllarse na súa presenza por orde xeracional como recolle a instantánea realizada no ano 2006.

Na actualidade o mancala é un xogo popular, pero na antigüidade, nalgúns países só xogaba a nobreza, as fichas ou sementes eran de ouro ou marfil. As partidas do mancala eran previas aos combates entre as tribos veciñas co fin de agudizar o enxeño e os reflexos para fomentar as súas habilidades mentais na loita. Tamén valía para elixir ao sucesor dun rei falecido, os candidatos xogaban sucesivas partidas do Mancala e o gañador final era o novo rei. No British Museum pódese contemplar unha estatua funeraria do século XVI,

Imaxe 6: O *oba* de Ketou. Instantánea realizada no ano 2006

que representa ao rei Shunda Balongobo cun mancala na cabeza e outro no colo.

En África, o xogo do mancala, engloba varios tipos de xogos: na zona ao norte do Golfo de Guinea, coñecida como África non bantú, o taboleiro está formado por dúas ringleiras de seis ocos cada unha; na zona situada ao sur do citado Golfo, a África bantú, o taboleiro ten catro ringleiras e na zona de Somalia e Etiopía os taboleiros teñen tres. Segundo o primeiro dicionario fon-francés, publicado polo sacerdote español, o padre Segurola, o Mancala caracterízase por ser un xogo de cálculo que varía segundo o xeito de xogar e o número de *ajikwin*, que son as sementes que hai en cada burato. Algunhas das variantes son *Aklu*, *Atondu*, *Enexodu*, *Xwenume* e *Kowolodu*. En todas estas versións o gañador é o xogador que logra facerse con máis *ajikwin*.

Como se xoga ao Mancala?

A variante do xogo que se vai a mostrar é a da zona de Benín. Xógase entre dúas persoas por quenda. O taboleiro colócase entre os xogadores, de xeito que cada xogador teña diante unha ringleira de seis ocos, en cada oco colócanse catro sementes.

Imaxe 7: Rúa de Gbanamé, novembro de 2006

Algúns taboleiros poden ter dous ocos laterais para pór as sementes que se comen. O xogo ten como fin que cada xogador consiga o maior número de sementes do contrincante.

Xogador **B**

Casa de **B**	•••• $\mathbf{6_B}$	•••• $\mathbf{5_B}$	•••• $\mathbf{4_B}$	•••• $\mathbf{3_B}$	•••• $\mathbf{2_B}$	•••• $\mathbf{1_B}$	Casa de **A**
	•••• $\mathbf{1_A}$	•••• $\mathbf{2_A}$	•••• $\mathbf{3_A}$	•••• $\mathbf{4_A}$	•••• $\mathbf{5_A}$	•••• $\mathbf{6_A}$	

Xogador **A**

Dun xeito aleatorio elíxese o xogador que empeza primeiro. Supoñamos que é o xogador **A** o que inicia a partida e que colle todas as sementes dun dos seus ocos do seu lado e vai depositándoas unha a unha nos ocos seguintes, segundo o sentido contrario das agullas do reloxo. Por exemplo, o xogador **A** parte do oco $\mathbf{6_A}$ e bota unha semente en cada un dos ocos $\mathbf{1_B}$, $\mathbf{2_B}$, $\mathbf{3_B}$ e $\mathbf{4_B}$.

Xogador **B**

Casa de **B**	•••• $\mathbf{6_B}$	•••• $\mathbf{5_B}$	••••• $\mathbf{4_B}$	••••• $\mathbf{3_B}$	••••• $\mathbf{2_B}$	••••• $\mathbf{1_B}$	Casa de **A**
	•••• $\mathbf{1_A}$	•••• $\mathbf{2_A}$	•••• $\mathbf{3_A}$	•••• $\mathbf{4_A}$	•••• $\mathbf{5_A}$	$\mathbf{6_A}$	

Xogador **A**

A captura prodúcese se a última semente se deposita nun oco inimigo, e se este contén, coa semente que acabamos de depositar, dúas ou tres sementes, entón captúranse as sementes dese burato e as de todos os anteriores que teñan dúas ou tres sementes. Por exemplo, se o xogo está como indica o seguinte taboleiro, se **A** move desde o oco $\mathbf{4_A}$, os ocos $\mathbf{3_B}$, $\mathbf{4_B}$, e $\mathbf{5_B}$ ficarán baleiros.

Xogador **B**

Casa de **B**	• $\mathbf{6_B}$	•• $\mathbf{5_B}$	• $\mathbf{4_B}$	• $\mathbf{3_B}$	••• $\mathbf{2_B}$	•• $\mathbf{1_B}$	Casa de **A**
	$\mathbf{1_A}$	•• $\mathbf{2_A}$	•• $\mathbf{3_A}$	••••••• $\mathbf{4_A}$	$\mathbf{5_A}$	• $\mathbf{6_A}$	

Xogador **A**

$\Downarrow$

Xogador **B**

Casa de **B**	• $\mathbf{6_B}$	••• $\mathbf{5_B}$	•• $\mathbf{4_B}$	•• $\mathbf{3_B}$	•••• $\mathbf{2_B}$	••• $\mathbf{1_B}$	Casa de **A**
	$\mathbf{1_A}$	•• $\mathbf{2_A}$	•• $\mathbf{3_A}$	$\mathbf{4_A}$	• $\mathbf{5_A}$	•• $\mathbf{6_A}$	

Xogador **A**

$\Downarrow$

Xogador **B**

Casa de **B**	• $\mathbf{6_B}$	$\mathbf{5_B}$	$\mathbf{4_B}$	$\mathbf{3_B}$	• • • • $\mathbf{2_B}$	• • • $\mathbf{1_B}$	• • • • • • • Casa de **A**
	$\mathbf{1_A}$	• • $\mathbf{2_A}$	• • $\mathbf{3_A}$	$\mathbf{4_A}$	• $\mathbf{5_A}$	• • $\mathbf{6_A}$	

Xogador **A**

Da simple observación do xogo dedúcese que o número máximo de sementes que se pode comer nun movemento é dezaoito. Hai normas suplementarias para os seguintes casos:

Se o oco de partida contén máis dunha ducia de sementes, daremos unha volta completa ao taboleiro saltando o oco de partida que debe quedar baleiro.

No caso de que un xogador quede con todos os ocos do seu lado baleiros de sementes, o seu rival está obrigado a realizar na súa quenda un movemento que introduza sementes no lado do xogador que quedou sen elas. No caso de que esta opción non sexa posible, remata a partida. O xogador que conserva as sementes nos seus ocos recólleas para a súa casa.

Cando quedan moi poucas sementes no taboleiro, repetíndose ciclicamente as mesmas posicións, cada xogador unirá as sementes que estean ao seu lado do taboleiro coas sementes que comeu durante a partida.

É interesante, desde o punto de vista estratéxico, estar na procura de acumular o máximo de sementes nun dos propios ocos. E tamén tratar de non introducir sementes nos ocos do xogador contrario.

A partida remata cando o xogador gañador logra facerse coa maioría das sementes (vinte e cinco ou máis).

Imaxe 8: A xulgar polo sorriso, xa sabemos quen gañou

Referencias

Bibliográficas

[1] F. E. Agostini, N. A. Carlo de, *Juegos de la Inteligencia*, Círculo de Lectores, Barcelona, 1989, páxs. 128-130.

[2] J. Pericay (ed.), *Mancala. Sembrar y cosechar*, Juegos de Ingenio, tomo Juegos, fascículo 8, Ediciones Orbis S. A., Barcelona, 2003.

En internet

[3] Au Jardin Helvetia, http://ajh.biz/information/information.php?langue=en

[4] Awalé.info, *Juegos Mancala en el mundo*, http://www.awale.info/historia/jocs-mancala-al-mon/?lang=es

[5] A. M, Bermejo, *Como una Venecia africana*, Público.es, 7/12/09, http://www.publico.es/viajes/276084/como-una-vene-cia-africana

[6] J-Ch. Coovi Gomez, *L'oeuvre de Cheikh Anta Diop et les defis majeurs de la Renaissance Africaine au troisieme millenaire*, http://www.sangonet.com/infosp/form/oeuvre-CAD-defim-Renaissance-Af3eM.html

[7] R. Gale, *Blog A Welsh View*, http://xo.typepad.com/blog/2008/03/ganvie---the-ve.html

[8] C. García, *Las tiendas de juego de tablero de Madrid*, http://juegosdetablero.tripod.com/wari.html

[9] M. Moreira, *Un tablero para cada crisis*, ABC.es, 30/06/2012, http://www.abc.es/20120630/comunidad-valencia/abcp-tablero-para-cada-crisis-20120630.html

[10] A. K. Ouessou I., *Desde Benín*, La Gaceta de Guinea Ecuatorial, http://www.lagacetadeguinea.com/126/11.htm

[11] Projet Bénin, http://www.projetbenin.com/benin.php

LUCÍA SOMOZA SAMPAYO
CIFP Anxel Casal - A Coruña
<luciasomoza@edu.xunta.es>

MERCEDES SAMPAYO YÁÑEZ
Profesora xubilada
<msy@edu.xunta.es>

Eses números tan próximos

JOSÉ MARÍA BARJA PÉREZ

Fronte ao anumerismo que nos envolve, na vida cotiá manexamos constantemente números e códigos. Coñecelos forma parte tamén da formación cultural que debemos transmitir.

Palabras chave: Números, códigos, código de barras, IBAN.

Those close numbers
In everyday life we constantly handle numbers and codes, compared to innumeracy that surrounds us. Knowing them is also part of the cultural education we should transmit.

Key words: Numbers, codes, barcode, IBAN.

É tan característica da nosa época a abundancia de números que nos rodean, que apenas lles prestamos atención. E, con todo, unha mirada atenta permite espertar a curiosidade e xustificar a importancia que ten para calquera persoa un coñecemento dos números, algo superior ao necesario cómputo elemental.[1]

Billetes

Se algo chama a atención a pequenos e maiores é a simboloxía dos billetes, que é repetidamente explicada en termos de arte e achegas culturais. Pero nos billetes do euro descubrimos que cada un deles é identificado cunha cadea de números precedidos dunha letra, que aparecen dobremente impresos no dorso. Aparentemente arbitrarios, gardan con todo información curiosa e un antigo algoritmo de verificación de operacións aritméticas.
A letra identifica o país emisor do billete, segundo unha asignación[2] algo estraña: **Z**, Bélxica; **Y**, Grecia; **X**, Alemaña; **V**, España; **U**, Francia; **T**, Irlanda; **S**, Italia; **P**, Países Baixos; **N**, Austria; **M**, Portugal; **L**, Finlandia; **H**, Eslovenia; **G**, Chipre; **F**, Malta; **E**, Eslovaquia; **D**, Estonia [ademais están reservadas: **W**, Dinamarca; **R**, Luxemburgo; **K**, Suecia; **J**, Reino Unido; pero non se usarán I, O, Q evitando que se poidan confundir con 1 ou 0].

En canto aos 11 números, levan implícita unha verificación formal de validez: ao precedelos cos dous díxitos que corresponden á letra na orde alfabética usual, o número resultante de 13 díxitos **debe ter** resto **8** ao dividilo por 9. Para os descoidados, esa operación realizábana habilmente os mestres no século pasado para verificar de forma rápida que os seus alumnos foran capaces de realizar correctamente unha división. Chamada "proba do nove" (en inglés, *casting out nines*) aparecerá definida na 23ª edición[3] do DRAE como «cálculo sinxelo que serve para verificar o resultado das operacións aritméticas, especialmente na multiplicación e na división, fundado en que o resto de dividir un número por nove é o mesmo que o de dividir tamén por nove a suma das súas cifras.» Tamén chamada "redución a unha cifra", a reiterada suma das cifras ata que quede unha soa, é a descrición algorítmica do cálculo do resto de dividir por 9 unha cifra dada. Por exemplo o número do billete reproducido abaixo, que corresponde a Países Baixos, é P03200281138; como P é a 16ª letra, o número 1603200281138 "redúcese" a 35, que, á súa vez, dá 8, ou, $1603200281138 \equiv 8 \pmod 9$.[4]

A "proba do nove" aplicada para verificar a corrección de operacións aritméticas baséase no traslado homomórfico das contas á aritmética módulo nove. Dise que como *abjectio novenaria* foi coñecida polo bispo romano Hipólito no século III e que Ibn Sina (Avicena, nacido no actual Usbequistán) contribuíra ao desenvolvemento desa técnica, empregada polos matemáticos indios do século XII. Pero moitos non son conscientes de que esta "proba" pode dar falsos positivos.[5] Por seguir o exemplo recollido na páxina de instrucións do pasatempo *Murphyx*, a comprobación para a operación $21 \times 38 = 798$ sería $3 \times 2 \equiv 6 \pmod 9$, pero a "proba" tamén daría por correcta esa multiplicación se se dese como resultado 708, 807 ou 816.

Aínda que non na forma actual, ese método de verificar o cálculo era mesmo anterior ao uso das cifras. Os romanos operaban non tanto con algoritmos senón mediante soportes físicos diversos como pedriñas, *calculus*, ou instrumentos asimilables aos máis recentes ábacos; pero a base decimal do sistema faría posible formular un procedemento análogo sen o estímulo da imaxe gráfica das cifras. Estas permiten unha explicación completa, verosimilmente formulada polos matemáticos indios, quen estableceron o sistema de notación que agora usamos. De feito, unha primeira explicación do sistema aparece en Occidente no libro de 1202, *Liber abbaci* de Fibonacci, que serviu para difundir por Europa o *Modus indorum* e os primeiros algoritmos do cálculo, e onde se detalla por que $37 \times 37 = 1369$.

As cifras

Sorprende a moitas persoas o descubrir que a representación dos díxitos non é a mesma en todo o mundo. De feito, a notación árabe, a bengalí e a chinesa son empregadas na actualidade por millóns de persoas e case esquecemos que as nosas cifras (de *sifr* "baleiro", ou cero) son tan só unha das evolucións dos símbolos orixinais indios, que eles manexaban seis séculos antes de que chegasen a Occidente. Do orixinal brahámico +, que representaba a cifra catro, derivaron (véxase a páxina 894 de [4]) tanto o noso **4**, como o **8** que empregan os 163 millóns de habitantes de Bangladesh, xunto a outros 83 millóns de persoas dos estados indios de Bengala Occidental e Tripura.

Occidental	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arábigo	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Bengalí	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
Chinés		一	二	三	四	五	六	七	八	九

A contribución matemática doutro oriúndo de Uzbekistan, *Abū Ja'far Muhammad Ben Mūsa Al Khuwarizmī*, non é suficientemente destacada (se o é en [4], páxs. 1230-1233; véxase tamén [1], páxs. 91-92). Nado no ano 783 en Jiva, no Jorezm (Usbequistán), viviu en Bagdad (cara ao 850, alí morreu), na corte do califa abasí *Al Ma'mūn*, pouco tempo despois de que Carlomagno fose nomeado emperador de Occidente. Era un dos membros máis importantes do grupo de matemáticos e astrónomos que traballaron na *Bayt al Hikma* (*Casa da Sabedoría*, que hoxe correspondería á Academia de Ciencias de Bagdad). A súa celebridade está unida a dúas das súas obras: *Al jabr wa'l muqābala* que refire as operacións preliminares para resolver ecuacións (*al jabr*, "compoñer", pasar os termos dun membro a outro da igualdade de modo que só haxa termos positivos na ecuación; *muqābala* "reducir", sumar os membros do mesmo tipo da ecuación); na segunda, *Kitab al jāmi' wa'l tafrīq bī hisāb al hind*, explicaba como os indios, mediante a numeración decimal posicional, realizaban a adición e a subtracción, recomendando non esquecer escribir os ceros para non confundirse. Estes libros do século IX, coñecidos por traducións[6] ao latín realizadas a partir do século XII, introduciron eses avanzados métodos nun Occidente que aínda empregaba a numeración romana e calculaba con medios "pedestres". Ademais de dar significado matemático á **álxebra** (engadido ao común de "compor ósos", que xa estaba incorporado ao castelán e ao italiano)[7], o nome do autor pasa a designar xenericamente o sistema constituído polo cero, e nove cifras e os procedementos de cálculo procedentes da India. A transliteración do nome, e así a designación do sistema, vai variando desde *alchoarismi*, *algorismi*, *algorismus* e finalmente *algoritmo*, moito antes de alcanzar a acepción máis ampla e abstracta que hoxe lle atribuímos (a base mesma da teoría e práctica dos computadores).

Como se pide a transversalidade das materias, aquí temos un bo exemplo de achegas lingüísticas da matemática. Variantes de nomes da obra e o "apelido" Al Khuwarizmī proporcionaron polo menos catro "lemas lingüísticos" nos nosos idiomas. Di o Dicionario da RAG [http://www.realacademiagalega.org/dicionario#inicio.do]: «*algarismo arábigo* Signo de orixe árabe que representa os números no sistema decimal»; «*algoritmo* Conxunto de regras que, ao aplicalas, permiten resolver un problema mediante un número finito de operacións»; «*álxebra* Rama das matemáticas que estuda a cantidade en xeral, as súas estruturas, relacións, operacións, etc., utilizando letras ou signos en lugar de números. Tratou de aplicar a álxebra aos problemas da lóxica; Asunto moi complicado ou difícil de entender. Para min o que estaba dicindo era álxebra pura»; «*alxebrista* Persoa versada en álxebra».

Esténdese máis o Dicionario da RAE: «*guarismo, ma* Perteneciente o relativo a los números; Cada uno de los signos o cifras arábigas que expresan una cantidad»; «*algoritmo* (quizá del latín tardío *algobarismus*, y este abrev. del ár. clás. *ḥisābu lġubār* 'cálculo mediante cifras arábigas'[8]) Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema; Método y notación en las distintas formas del cálculo»; «*álgebra* (del latín. tardío *algĕbra*, y este del ár. clás. *alǧabru* [*walmuqābalah*] reducción [y cotejo]') Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita; desus. Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados»; «*algebrista* Persona que estudia, profesa o sabe el álgebra (‖ matemática); desus. Cirujano dedicado especialmente a la curación de dislocaciones de huesos; germ. Alcahuete[9] (‖ persona que concierta una relación amorosa)» [http://lema.rae.es/drae/]

Unha curiosidade xeográfica

Continuando coa esixencia de buscar a transversalidade, invadamos un campo que require coñecementos de matemáticas.[10] Nos billetes, cales son as illas que aparecen nos recadros do bordo inferior do reverso, á beira de EYPΩ (as letras gregas para EURO)? A resposta é: os territorios ultramarinos dos estados membros da eurozona. Así están debuxados os Departamentos franceses de ultramar: **Guaiana** francesa (capital Cayena, entre Brasil e Surinam, cuxos bordos marítimos no debuxo dos billetes aparentan os cornos dun touro; non confundir con Guaiana británica); as illas caribeñas **Guadalupe** (Basse-Terre) e **Martinica** (Fort-de-France); a do océano Índico, **Reunión** (Saint-Denis). [A partir do 1 de xaneiro de 2014, será Departamento tamén Mayotte (Mamoudzou) no Índico, aínda que só son 374 km^2]. Ollo, ademais destes Departamentos, Francia ten “colectividades de ultramar”: no Pacífico, Nova Caledonia (Numea), Polinesia Francesa (Papeete) e Wallis e Futuna (Mata-Utu); no Atlántico Norte, Saint-Pierre-et-Miquelon (Saint-Pierre) e as caribeñas, San Martín (Marigot) e San Bartolomé (Gustavia).

Como o tamaño mínimo para debuxar un territorio foi fixado en 400 km^2, nas illas **Canarias** faltan nos billetes El Hierro (278 km^2) e La Gomera (369,8 km^2), do mesmo xeito que nas Baleares non se debuxan Formentera (83,24 km^2) e Cabrera (15,69 km^2). Pero si aparecen nos billetes as Rexións Autónomas portuguesas, **Azores** e **Madeira**, representadas no Atlántico, á beira dunha da media ducia das estrelas brancas de cinco puntas. Sorpréndenos esa representación pois aparenta unha latitude moi alta, aínda que en realidade Azores está nunha latitude inferior a Madrid, e a latitude de Madeira, aínda que menor que a de Tarifa, é maior que a do arquipélago canario. A pesar de que Chipre e Malta se integraron na eurozona en 2008, non aparecen nos billetes, por pequena, Malta (316 km^2) e por non entrar no mapa, ao ser tan oriental, Chipre (9.250 km^2)[11].

Murphyx

Como xa se dixo antes, a “proba do nove” é a base do pasatempo *Murphyx* que aparecía na revista da compañía Iberia e agora é un xogo de mesa e en rede (`www.murphyx.com`). O sorprendente é que ten unha solución aritmética moi sinxela que, unha vez coñecida, converte cada reto nun cálculo elemental.

Unha descrición do ano 2008 dicía «*Murphyx*, es un juego de números, que desarrolla el potencial aritmético y el intelecto desde la primera partida. Este juego estimula la capacidad de calculo, memoria y rapidez. Es un poco difícil empezar a jugarlo, pero cuando le agarras la mano a unas operaciones aritméticas de ayuda (el metodo del 9), se hace mucho mas fácil. Viene en dos idiomas (ingles y español) y muy pronto saldrá a la venta como juego de mesa.» Nas instrucións explícase que temos fichas de dúas caras cos números do 1 ao 8, de modo que a suma de ambas as caras dunha ficha é sempre 9; e o obxectivo do xogo é lograr que a “redución a unha cifra” do número que presentan as fichas sexa unha cifra dada, o *nix*, volteando as fichas que sexa necesario para iso.

Analizando o problema, vemos que os cambios admisibles corresponden a un cambio de signo na aritmética modulo 9 [exemplo, voltear a ficha **1**|**8**, significa cambiar de 1 a $8 \equiv -1 \pmod 9$)]. Así, podemos enunciar o problema doutro xeito: “Dadas cifras $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8$, determinar cal (ou cales) deben cambiar de signo para que a suma de todas elas módulo 9 sexa un valor dado *nix*.” Supondo que só se precisará un cambio de signo, pode reformularse como: "Se $a_1 + a_2 \cdots - a_i \cdots + a_8 \equiv nix \pmod 9$, cal é i?" A solución obtense, desa ecuación, restando a ambos os membros $sum = a_1 + a_2 \cdots + a_i \cdots + a_8$, a suma de todas as cifras, pois ocorre que $a_1 + a_2 \cdots - a_i \cdots + a_8 - sum \equiv nix - sum \pmod 9$, que é $-2a_i \equiv nix - sum \pmod 9$, e de aí $a_i \equiv 5\ (sum - nix) \pmod 9$. O cal nos permite identificar a ficha que hai que voltear; e o argumento tamén serve para o caso de que haxa que voltear dúas ou máis fichas, que serán as que sumen a devandita cantidade 5 $(sum - nix)$. E iso é todo o segredo do xogo, que foi obxecto dun taller nas *IX Jornades d'Educació Matemàtica da Societat d'Educació Matemàtica Al-Khwarizmi* da Comunidade Valenciana [Javier Muñoz Andújar[12], *Murphyx (el juego del 9) aplicado al aula de matemáticas*, 3/9/2010], descrito como «unha forma divertida para os alumnos de familiarizarse coa técnica de comprobación aritmética do esquecido "método do nove", conseguindo unha gran rapidez na comprobación de operacións e como resultado un aforro de tempo nos exames de matemáticas» (tamén a propaganda como xogo de mesa asevera «Ayuda a los niños a desarrollar su 'potencial aritmético". Novedad mundial, Feria del Juguete de Nuremberg 2010»).

NIF

O método de verificación dos billetes de euro segue os métodos de detección e corrección de erros, utilizando métodos de aritmética modular e díxitos de control, que se empregan en moitos ámbitos. Así o Real Decreto 1245/1985, de 17 de xullo, estableceu no seu Artigo 6.2, «al número del Documento Nacional de Identidad, sin modificación alguna, seguirá el correspondiente código de verificación, que será una letra mayúscula.» En consecuencia desde o 28 de xullo de 1985 levamos, incorporado ao número individual de identificación que se consigna no DNI[13], unha forma de verificar a súa validez. Ocorría que Facenda detectaba que, ao consignar o número do DNI en documentos e facturas, producíanse moitas "equivocacións" (principalmente transposición de dous díxitos contiguos), polo cal creou o NIF (acrónimo de "número de identificación fiscal"). O cálculo desa letra de control emprega o número primo 23 e unha permutación de letras do alfabeto (que foi coñecida moi pronto, e que era deducible dunha listaxe, como a de votantes). Aínda que sexa unha suposición persoal, case seguro que 23 xurdiu ao suprimir do abecedario as letras que poderían inducir a confusión (I por 1, O por 0, U por V) e a permutación só trataba de escurecer a asignación da letra. En notación de Mathematica© a función escríbese así:

$$\text{letraNIF}[\text{DNI\_}] := \{T, R, W, A, G, M, Y, F, P, D, X, B, N, J, Z, S, Q, V, H, L, C, K, E\}[[\text{Mod}[\text{DNI}, 23] + 1]]$$

isto é, da listaxe fixada extraer a letra que ocupa o posto que corresponde ao resto de dividir o número do DNI por 23 (nese sistema de computación simbólica as listas numéranse desde 1). Tan ben debeu de funcionar o NIF, que vinte anos despois da súa creación, o Consello de Ministros do 4 de febreiro de 2005, no Plan de Prevención da Fraude Fiscal, determinou que o NIF do arrendador debe ser consignado na declaración da renda dun inquilino; ademais volve definir a ONIF, a Oficina Nacional de Investigación da Fraude. Pero necesitan todos, xornalistas e políticos, un mínimo de coñecemento do NIF que evite afirmacións do tipo «99999999-R es un DNI ficticio»[14] cando só se precisa unha calculadora para verificar que 1= Mod[99.999.999, 23].

O número primo 23 foi unha boa elección: próbase facilmente que o NIF detecta todos os cambios dunha cifra do DNI e todas as transposicións de dúas cifras do DNI. En efecto, se se intercambian dúas cifras consecutivas x e z dun DNI, só se mantén o mesmo NIF se ambas son iguais pois para que $a_1a_2 \ldots x\ z \ldots a_8$ e $a_1a_2 \ldots z\ x \ldots a_8$ compartan o mesmo NIF, debe cumprirse:

$$10^i(10x+z)–10^i(10z+x) \equiv 0 \pmod{23}, \text{ isto é, } 10^i 9(x–z) \equiv 0 \pmod{23}, \text{ e iso só se } x=z$$

Con todo, o NIF non detecta[15] outros cambios de cifras do DNI, como moitos cambios de tres cifras, mesmo cando se trata dunha permutación circular de tres consecutivas.

Dorso do DNI

O descoñecemento destes mecanismos de verificación de códigos creou lendas urbanas como a que asegura que o último número que aparece na segunda fila de caracteres OCR-B para lectura mecanizada no dorso do documento do DNI corresponde ao número de persoas cos mesmos apelidos que se consignan na terceira fila. En realidade é un díxito de control segundo un algoritmo magnificamente exposto en http://josep-portella.com/es/escritos/desmitificando-los-numeros-del-dni/

No exemplo de imaxe de documento de DNI detéctanse algunhas diferenzas cun real: o campo aí rotulado DESP e con contido AAA-000000, nun verdadeiro documento vai marcado como IDESP e son tres letras adxuntas a seis díxitos o «número de serie do soporte físico do cartón»; no espazo da imaxe láser cambiante (CLI, *Changeable Laser Image*) o que debe aparecer é a data de expedición en formato **ddmmaa** (e noso usual formato de datas) e un acrónimo persoal de tres consoantes, a primeira de cada apelido e a do primeiro nome [moitos máis detalles poden consultarse na páxina oficial do DNI electrónico, en vigor desde 2006, [http://www.dnielectronico.es/Asi_es_el_dni_electronico/descripcion.html]

Aínda que se trata dun simple feito burocrático, non deixa de ser sorprendente a data de caducidade consignada no DNI permanente, o dispoñible para todos os que cumpriron 70 anos e para grandes inválidos maiores de trinta anos. Baixo o texto "Válido hasta", aparece escrito 01 01 9999 que, como data, é moi afastada[16] pero corresponde ao venres en que se abre a Porta Santa para o último Ano Santo Compostelán do noveno milenio[17].

Número do cartón de crédito

O número dos cartóns de crédito é 16 díxitos, divididos en grupos de catro, onde o último díxito é un díxito de control que permite detectar algúns erros. É fácil o cálculo dese díxito: o primeiro díxito á esquerda multiplícase por 2; o seguinte por 1, e así sucesivamente. Obtida a suma de todos eses díxitos, incluídos os 1 que eventualmente poidan xurdir na duplicación das cifras en posto impar, calcúlase o "complemento módulo 10" (o que falta ata o seguinte múltiplo de 10, isto é, o oposto módulo 10 desa suma) que será o díxito de control empregado. O algoritmo[18] foi deseñado polo científico de IBM Hans Peter Luhn e descrito na patente U.S. Patent 2,950,048 solicitada o 6 de xaneiro de 1954 e concedida o 23 de agosto de 1960. Detecta o 100 % dos erros nunha soa cifra e o 97,77 % das transposicións adxacentes (non detecta o cambio de 09 por 90), pero non descobre outros erros comúns, como unha transposición non adxacente do tipo cambiar *abc* por *cba*.

Este algoritmo é o empregado no código chamado CIF (código de identificación fiscal) para determinar o seu díxito de control[19], que precisamente é a letra que na orde alfabética ocupa o posto que corresponde ao díxito de control de Luhn (se este fose 0 usaríase a 10ª letra, un J). Tamén no código ISIN (*International Securities Identification Numbering System*), que serve para identificar de forma unívoca un valor mobiliario a nivel internacional, o último dos 12 caracteres alfanuméricos é un díxito de control calculado polo algoritmo de Luhn; cada unha das letras que aparezan, incluídas as dúas primeiras que identifican o país segundo a norma ISO 3166, transfórmase en dous díxitos (sumando 9 á posición da letra na orde alfabética; así A convértese en 10, B en 11,... , Z en 35). Trátase talvez do primeiro código cuxo cálculo do díxito de control está especificado no BOE[20], incluíndo exemplos de como se calcula.

CCC e agora IBAN

As contas bancarias identifícanse polo Código Conta Cliente (C.C.C.), recomendado polo Consello Superior Bancario (17/12/1989) e a CECA (Confederación Española de Caixas de Aforro). É o código que estamos acostumados a utilizar nas relacións cos bancos, formado por 4 cifras que identifican a entidade, 4 para a sucursal, dúas rotuladas D.C. (díxitos de control) e 10 para o número de conta. Cada un dos díxitos de control (o primeiro verifica os 8 díxitos entidade-sucursal e o segundo, os 10 da conta) é, en aritmética módulo 11, o produto escalar do vector de díxitos por un vector de pesos que é a progresión xeométrica de razón 2 que comeza en 7 e en 10, respectivamente. Por mor desa definición, os campos deben ser completados sempre con ceros á esquerda; ademais, se o díxito de control vale 10 substituirase por 1, o cal é un erro de deseño que diminúe a eficacia do código. Outro erro de deseño é que o intercambio do segundo díxito de control e o primeiro díxito do número de conta resulta ser tamén un código válido, outra transposición que non detecta o protocolo C.C.C.

Ultimamente fálase do código IBAN (*International Bank Account Number*) deseñado para os pagos transfronteirizos pois facilita a validación de números de conta estranxeiras. O IBAN segundo a norma ISO 13616 de 1997, consiste en antepor información adicional ao formato de número da conta de cada país. Comeza co código de dúas letras do país, ES no caso de España, seguido polos dous díxitos de control e os 20 díxitos do C.C.C. (un total de 24 caracteres alfanuméricos). Os díxitos de control son 98 - Mod[CCC142800, 97], a diferenza entre 98 e o resto módulo 97 do gran número formado polo C.C.C. seguido de 14 (por E), 28 (por S) e dous ceros; se o resto é menor que 10, o primeiro díxito de control é un 0.

A única dificultade é o cálculo do resto módulo 97 dun enteiro de 26 cifras, que non pode ser realizado nunha calculadora ou directamente nunha folla de cálculo[21], pero si pode facerse cun elemental proceso recursivo (de fácil implementación nunha folla de cálculo). Usando dúas cifras cada vez, dado que Mod[100, 97] = 3 e mediante un esquema de Horner, o par de díxitos de control DC calcúlase así:

$$\text{DC} = (a_1\, a_2);\ \text{DC} := \text{Mod}[\text{DC}{*}3 + (a_{2i+1}\, a_{2i+2}), 97],\ \text{para } i = 1, \ldots, 12;\ \text{DC} := 98 - \text{DC}$$

Por exemplo[22], para a conta en formato C.C.C. 2310-0001-18-0000012345, as operacións son:

DC = 23; DC := Mod[23* 3 + 10, 97] = 79; DC := Mod[79* 3 + 00, 97] = 43;

DC := Mod[43* 3 + 01, 97] = 33; DC := Mod[33* 3 + 18, 97] = 20;

DC := Mod[20* 3 + 00, 97] = 60; DC := Mod[60* 3 + 00, 97] = 83;

DC := Mod[83* 3 + 01, 97] = 56; DC := Mod[56* 3 + 23, 97] = 94;

DC := Mod[94* 3 + 45, 97] = 36; DC := Mod[36* 3 + 14, 97] = 25;

DC := Mod[25* 3 + 28, 97] = 6; DC := Mod[6* 3 + 00, 97] = 18 ; DC = 98 - 18 = 80

co cal o IBAN correspondente[23] resulta ser ES80 2310 0001 1800 0001 2345.

Barras que informan

Unha das vantaxes do invento de Joseph Woodland[24], os códigos de barras, é que simplemente fixándose nos dous ou tres primeiros díxitos dos códigos antes chamados EAN-13 e agora GTIN-13 (*Global Trade Item Number*), descubrimos os países que etiquetan os produtos que compramos. O 13º díxito que aparece na "liña de interpretación" do símbolo é un díxito de control deste. Para calculalo súmanse en aritmética módulo 10 os díxitos das posicións pares, cantidade que se multiplica por 3 e á que se engade a suma dos díxitos en posición impar. Se o resultado é 0, o 13º díxito tamén será 0, mentres que nos demais casos será a súa diferenza a 10 (o seu oposto en aritmética módulo 10). Talvez polo seu carácter de lectura mecánica, este modelo de díxito de control non é unha marabilla de deseño, pois apenas detecta os erros dun díxito, pero pode ser útil.

No suplemento Magazine do 9 de decembro de 2012 apareceu como ilustración unha tesoira cortando un código de barras. Cóntanse ben as 30 barras e aparecen 12 dos 13 díxitos dun EAN. Como o díxito de control 6 coincide coa súa correcta codificación nas barras, sabemos que o único que falta é o primeiro díxito. Ese díxito x para este exemplo calcúlase resolvendo a ecuación $x + 69 \equiv -6 \pmod{10}$; así obtense que x é un 5, o cal indica que o produto é do Reino Unido (50 é o seu prefixo). Realizando a procura do devandito código en www.ean-search.org salta a sorpresa: é un produto comercial chamado *Carob*[25] *Powder* que resulta ser "vainas de algarroba tostadas", presentado como un substituto do chocolate.

Incluso algúns billetes de aparcadoiro, con código de barras para lectura óptica, poden ser "descifrados". Aínda que no billete do aparcadoiro adoitan aparecer só as barras, sen a liña de interpretación, determinala é un exercicio escolar (como propuña, xa en 2005, Goyo Lekuona aos alumnos de terceiro e cuarto de ESO, seguindo *O método Lekuona: matemáticas con follas de cálculo*). E nalgúns casos xorde a sorpresa: aínda que é un correcto código de almacén (como marca o prefixo 20 e verifica o díxito de control) a información que contén é número do mes, do día e a hora de saída, cunha marxe de 10 minutos. Nada estraño, pero sen dúbida demasiado fácil.

Estes exemplos de álxebra e matemática discreta mostran cales son as matemáticas aplicadas na informática, e no día a día. E non é precisamente "o regreso ao ábaco"[26] o que mellorará as capacidades dos nosos estudantes de secundaria, pois ata os "campeóns mundiais de cálculo" deben comprender cómo se executa un algoritmo recursivo para facer o cálculo do IBAN, dados os límites de tamaño dos números que esa antiga ferramenta pode manexar.

Referencias bibliográficas

[1] P. Bayer Isant, *¿Para qué sirven hoy los números?*, Real Academia de Ciencias, http://www.rac.es/ficheros/doc/00355.pdf

[2] J. Beato Sirvent, "Códigos numéricos para la vida", *Suma*, nº 57 (febreiro 2008), páxs. 43-54.

[3] D. de Guadix, *Recopilación de algunos nombres arábigos (1593)[Dicionario de Arabismos, ed. Mª Agueda Moreno Moreno]*, Universidad Jaen, 2007.

[4] G. Ifrah, *Historia Universal de las Cifras. La Inteligencia de la Humanidad Contada por los Números y el Cálculo*, Editorial Espasa-Calpe, 1997.

Notas

[1]Nada menos que Michel Eyquem (señor de) Montaigne aseguraba en 1575, no libro II dos seus *Essais*, «*Je ne sçai compter ny a get nin a plume*» (non sei contar nin con fichas nin coa pluma) (en [4] páx. 1331, resáltase que se trataba dun home culto e viaxado con ampla biblioteca).

[2]A letra é asignada en orde decrecente (por iso se inicia en Z) atribuíndoa aos estados membros da Unión Europea antes da entrada en vigor do euro, segundo a orde alfabética do nome na súa lingua oficial (België/Belgique/Belgien, Danmark, Deutschland, Ellada, España, France, Ireland/Éire, Italia, Luxembourg/Luxemburg/Lëtzebuerg, Nederland, Österreich, Portugal, Suomi/Finland, Sverige, United Kingdom). As posicións de Dinamarca e Grecia foron intercambiadas, posto que o Y se parece á letra *ipsilón* do alfabeto grego, mentres que nese alfabeto non está o W. Foi reservada a letra mesmo aos que non adoptaron o euro, como Dinamarca, Reino Unido e Suecia, e tamén Luxemburgo que non emite billetes propios. A asignación seguiu para os que entraron no euro despois de 2002, incluído Estonia que comezou a imprimir en 2012.
Outro código moito menos evidente aparece na cara dos billetes case escondido (ocasionalmente nunha das estrelas). Neste caso a primeira letra do código dá a referencia do impresor. Nos billetes de España aparece **M** para indicar a Fábrica Nacional de Moeda e Timbre española; pero tamén **G** por *Koninklijke Joh. Enschedé* en Haarlem, Paises Baixos, **P** por *Giesecke & Devrient* en Munich, Alemaña, e **T** polo Banco Nacional de Bélxica en Bruxelas.

[3]Mellora amplamente a actual 13ª acepción de *prueba* na 22ª edición do DRAE, que se vai manter tamén: «Operación que se ejecuta para comprobar que otra ya hecha es correcta».

[4]Na numeración da nova versión dos billetes, a serie Europa, ademais da letra inicial que identifica ao país emisor, engadiu outra, sen ningún significado particular, só para ter números de serie. A verificación precisa agora transformar esa segunda letra no número de orde alfabética máis un. Por exemplo, para o billete belga con código ZB0200851269, ten que converter o Z en 26 (o número de orde alfabética); o B, en 3 (un máis que o seu número na orde alfabética) e, xa que 263 é "reducido" a 2, verificar que os dez números son "reducidos" a 6, para que todo o código de numeración do billete sexa "reducido" a 8. Como pola súa banda 1269 son "noves" e 020085 "se reduce" a 15 e este a 6, facilmente alcanzamos a comprobación da súa validez.

[5]Precisamente na 23ª edición do DRAE incluirase como segunda acepción de *prueba del nueve* «prueba clara que confirma la verdad o falsedad de una cuestión debatida».

[6]A tradución de Gerardo de Cremona titúlase *Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala*, o que mostra o termo matemático álxebra e nomea a Mohamed, fillo de Moisés (e pai de Ja'far) do Jorezm. Outra das traducións é atribuída a Robert de Chester, en Segovia, como parte da Escola de Tradutores de Toledo no ano 1145, como *Liber algebra et almuchabala*.

[7]En [3] páx. 69, tras expor que **álgebra** «llaman en España a 'cierta arte o sciencia de concertar huesos desconcertados'. [...] En Italia lo llaman: *aconchatori de ossi*, que —en italiano— significa 'concertador de huesos'», dáse como segunda acepción: «También llaman en España y en Italia a 'cierta regla o reglas de aritmética'. Es la misma algarabía y significa lo mesmo que acabo de dezir (combiene a saber) 'hallar o restituir cierta qüenta con número perfecto y verdadero'».

[8]En [4] páx. 1289 explícase polo miúdo que por hisāb al ghubār, "cálculo sobre el polvo", empregábanse as cifras arábigas no norte de África, o cal sería transmitido á Península Ibérica. Sen querer entrar en discusións etimolóxicas coa RAE, parece máis acertado derivar *algoritmo* das sucesivas deformacións do xentilicio Al Khuwarizmī.
Outra fonte de confusión é a proximidade fonética co termo *logaritmo* (do grego λόγος, razón, e αριθμός, número) termo creado por John Napier en 1614, no seu libro titulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, derivado literalmente de describilo no seu «teorema fundamental» como «un número que indica unha relación ou proporción». Refírese a que a diferenza de dous logaritmos determina a relación dos números aos cales corresponden, de maneira que unha progresión aritmética de logaritmos corresponde a unha progresión xeométrica de números. As constantes erratas mediáticas, ao intercambiar algoritmo e logaritmo, talvez poderán chegar a desaparecer se na clase de matemáticas achegamos este tipo de información filolóxica aos xornalistas do futuro.

[9]Hai citas de escritores que xustifican que a RAE manteña esta terceira acepción: Quevedo describindo á nai do *Buscón, llamado don Pablos* como «algebrista de voluntades desconcertadas, [...] y por mal nombre alcagüeta»; Alonso de Castillo

Solórzano no poema I.42 de *Donaires del Parnaso* alcuma a unha vella alcaiota, que actuou como mediadora nos amores entre Xúpiter e Dánae, de «algebrista de amores, que juntas voluntades separadas ...»

[10]Saber a medida en km^2 dalgún lugar coñecido evitaría describir a Cidade da Cultura como «un espacio de unos 148.000 kilómetros cuadrados» [*El delirio interrumpido*, El País, 29/3/ 2013], sen ser consciente de que esa cantidade corresponde a cinco veces a superficie de toda Galicia, en lugar de referirse a $14,18$ hectáreas.

[11]Na serie Europa foron incluídas no mapa tanto Malta coma Chipre, que se adheriron á UE despois de 2002. Dada a pequena dimensión de Malta (as illas habitadas de Malta, Gozo e Comino), a súa representación son dous puntiños por baixo da illa de Sicilia, sobrepostas nunha das estrelas do escudo en Europa. Criamos que Chipre ía no mapa anterior, ao confundir a maior illa grega, Creta (a súa capital Heraklion, chamada Candia ata principios do século pasado, ten 173.450 habitantes), coa illa, máis ao leste, que deu nome ao cobre, Chipre (cuxa capital, Nicosia, ten 47.832 habitantes).

[12]O centro virtual de divulgación das matemáticas da RSME (`http://www.divulgamat.net`) reproduce unha noticia de La Vanguardia 16/9/2011, *Un valenciano gana el premio 'Juego del Año' que concede una empresa inglesa por su creación 'Murphyx'*. Refire que Javier Muñoz xa gañara o premio Feira Valencia del Salón de Inventores Geniápolis 2004 e que a idea do xogo lle xurdiu falando cuns amigos ningún dos cales coñecía 'a proba do 9' que «se suprimió del sistema educativo español sobre mediados de los años 70 con la aparición de la calculadora y ahora los niños, cuando tienen que comprobar una operación aritmética, la tienen que hacer de nuevo con la consiguiente pérdida de tiempo en los exámenes de matemáticas».

[13]A existencia do DNI hoxe apenas é cuestionada. Di o Decreto 196/1976 (BOE 13/2/1976) asinado polo entón ministro da Gobernación, Manuel Fraga Iribarne: «Creado el documento nacional de identidad por Decreto de 2 de marzo de 1944, ha venido cumpliendo las misiones que le fueron asignadas como documento de identificación con eficacia plena en la acreditación de la personalidad individual.» Hai que subliñar que esa data de creación do DNI, 2/3/1944, é anterior en tres meses ao desembarco de Normandía e case un ano anterior a coñecerse publicamente os horrores dos campos de concentración, con prisioneiros identificados con números gravados na pel. No mundo futuro imaxinado polo inventor do termo ciberespazo William Gibson [*Mona Lisa Overdrive* (1988)], todos os habitantes do planeta teñen asignado un número individual SIN (*single identification number*); isto é, o pecado orixinal converteuse nun feito administrativo.

[14]«El DNI 99999999-R, que es ficticio, fue asignado a una de las personas que aparecen en las listas de adjudicatarios de las viviendas sociales de la Xunta en Novo Mesoiro y Eirís. El número, tal y como publicó ayer La Opinión, fue elaborado mediante un generador de DNI, un programa informático muy conocido entre los funcionarios, algo que niegan el delegado provincial de la Consellería de Vivenda e Solo y el concejal de Rehabilitación Urbana y Vivienda [quienes] aseguraron ayer, después de leer la información pública por este diario, que la R significa revisar. [...] El delegado de la Consellería aseguró desconocer la existencia de un generador de carnés de identidad. En las listas figuran más personas cuyo DNI existe y termina en R, pero sólo hicieron referencia a la R que acompañaba al número 99999999» [*Un DNI ficticio con R de "revisar"*, La Opinión, 5/4/2008]. Incluso o exemplo de DNI que adoita aparecer nos medios (reproducido arriba) leva ese NIF que sería o último en ser asignado co actual formato de 8 díxitos.

[15]O Número de Rexistro Persoal dos funcionarios españois, que son os dous díxitos resultantes de engadir 2 ao produto de 11 polo resto de dividir o número do seu DNI por 7, deseñado por algunha "prodixiosa" mente burocrática, non detecta nin un só erro, contrariamente ao NIF.

[16]A distancia de sete milenios é tan desmesurada que, nin comparando coas máis antigas civilizacións, somos conscientes da súa lonxitude. Segundo os exiptólogos, Keops comezou a reinar en 2589 a.C.. Teríamos que multiplicar por 1,73 o número de días entre hoxe e ese ano para alcanzar os 2.916.783 días que cara a diante separan a data de hoxe e a moi afastada impresa no DNI. Só Frank Herbert na súa saga *Dune*, imaxina un futuro a máis de 20.000 anos, iso si, como un gran imperio galáctico de estrutura feudal.

[17]Desde 2013 ata o 9999 incluído, haberá 1.117 Anos Santos Composteláns (en cada ciclo de 400 anos hai 56). Aínda que para entón posiblemente se terá perfeccionado a regra gregoriana dos bisestos, fixando que os múltiplos de 4.000 **non o sexan**, manterase ese número porque a usual secuencia **6-5-6-11** (1993–1999–2004–2010–2021) alterarase ao pasar polo 4000 e 8000 en 6-**6**-6-**10** (3993–3999–4005–4011–4021; 7993–7999–8005–8011–8021).

[18]Este algoritmo é un dos explicados en [2], aínda que erroneamente o chama Codabar, que á súa vez é un tipo de código de barras. Curta, pero moi informativa, é a entrada do blog *Money, Matter, and More Musings* co explícito, e ao tempo coidadoso título, *How to generate *Valid* Credit Card Numbers*, `http://www.thetaoofmakingmoney.com/2007/04/12/324.html`

[19]O Artigo 3.4 do Decreto 2423/1975, publicado no BOE do 25 de outubro de 1975, só di «Dígito de control». Esta era a norma que rexeu o sistema de identificación de persoas xurídicas ou entidades ata o 1 de xaneiro de 2008, cando entra en vigor o Real Decreto 1065/2007, de 27 de xullo, en cuxo Artigo 22.1.c precísase que o «número de identificación fiscal de las personas jurídicas y entidades sin personalidad jurídica» inclúe «un carácter de control». Na Orde EHA/451/2008, de 20 de febreiro, «regula la composición del número de identificación fiscal de las personas jurídicas y entidades sin personalidad jurídica», precisando que estará formado por «a) Una letra, que informará sobre la forma jurídica, si se trata de una entidad española, o, en su caso, el carácter de entidad extranjera o de establecimiento permanente de una entidad no residente en España; b) Un número aleatorio de siete dígitos; c) Un carácter de control.» Non se explicita cómo se calcula o carácter de control, pero, en cambio, dedica os Artigos 3, 4 e 5 a detallar a letra que encabeza ese código que seguimos chamando CIF. En particular, empezan por N as entidades estranxeiras; por W, as permanentes non residentes en territorio español; ademais separa a antiga asignación de Q a «Organismos Autónomos, estatales o no, y asimilados, y Congregacionales e Instituciones Religiosas», en Q para os «organismos públicos» e R para as «congregaciones e instituciones religiosas».

[20]O 30 de setembro de 2010 a Comisión Nacional del Mercado de Valores publica no BOE a súa «Norma técnica 1/2010, de 28 de julio» expondo a «codificación de valores negociables y otros instrumentos de naturaleza financiera, sobre estructura de

los códigos.» No artigo segundo apartado C descríbese en catro pasos o cálculo da «cifra de control», indicando que «en anexo se incluyen ejemplos aclaratorios de la aplicación de esta fórmula.» Nun anuncio de Santander Dividendo Elección (El País, 12/4/2013) aparece un código ISIN: ES0113900J37. O díxito de control, a última cifra **7**, sae das cifras (E, S, J substituíronse por 14, 28 e 19) 14280113900193 facendo o cálculo $-(8+1+6+2+6+0+2+6)-(1+2+0+1+9+0+9) \equiv -(31+22) \equiv \mathbf{7} \pmod{10}$

[21] A proposta de empregar o algoritmo da división con lapis e papel (aínda que se esqueceron da súa verificación coa "proba do nove") é o que se lle ocorreu a un presunto "Master en Banca y Finanzas (Online)" [`http://www.finanzasybanca.com/iberfinanzas/index.php/C/Codigo-Internacional-de-Cuenta-Bancaria-IBAN.html`]

[22] Na páxina web `http://es.ibancalculator.com/` calcúlase o IBAN para códigos C.C.C. correctos e valídanse ambos. Ademais tamén proporciona a identificación dunha entidade bancaria segundo o ISO 9362, o BIC (Código Identificador de Banco), tamén chamado SWIFT (The Society for Worldwide Interbank Financial Telecomunications) pola entidade que xestiona estes códigos. Está formado por 4 caracteres que identifican a institución financeira a nivel mundial, 2 caracteres que identifican o país, 2 caracteres da cidade de localización da unidade central da entidade e, opcionalmente, 3 caracteres que identifican unha oficina (por defecto XXX refírese á principal). Por exemplo, o código SWIFT principal do Banco Santander é BSCHESMM, por ser español (ES) e con sede en Madrid (MM).

[23] Se se usan **6** díxitos de cada vez, como Mod[1 000 000, 97] = 27 e Mod[142 800, 97] = 16, o cómputo dese IBAN sería: Mod[**23*** 27 + **100 001**, 97] = 33; Mod[33* 27 + **180 000**, 97] = 83; Mod[83* 27 + **012345**, 97]= 36; 98 - Mod[36* 27 + 16, 97] = **<u>80</u>**

[24] O deseño do código de barras basicamente débese a Norman Joseph Woodland (falecido o pasado 9 de decembro de 2012 aos 91 anos), quen tivo que esperar ao desenvolvemento de lectores apropiados e á mellora dos sistemas de impresión (a tecnoloxía láser). A súa idea patentada en 1952 aínda que caducou, foi reutilizada por IBM, empresa para a que traballaba; usouse por primeira vez na venda dun paquete de chicle nun supermercado da cadea *Marsh* en Troy, Ohio, en 1974. En España a primeira venda así foi un estropallo da firma 3M, o 3 de outubro de 1977 no supermercado Mercadona en Valencia. No símbolo máis usado 13 díxitos aparecen codificados como 30 barras (incluídos os separadores de inicio, final e centro) e 29 espazos; para que non importe a dirección de lectura, a codificación é diferente nas partes esquerda e dereita do símbolo. Usualmente os 3 primeiros díxitos codifican o país; os díxitos 4^{o} ao 7^{o}, o fabricante (ata 10.000); os 8^{o} ao 12^{o}, o produto (ata 100.000) sendo o 13^{o} o díxito de control.

[25] Segundo o DRAE, **algarroba** procede do árabe hispánico *alharrúba*, do árabe clásico *harrūbah* ou *harnūbah*, do persa *har lup* 'quijada de burro', froito do *algarrobo* [primeira aparición en castelán en 1269]; e defíneo como «una vaina azucarada y comestible, de color castaño por fuera y amarillenta por dentro, con semillas muy duras, y la cual se da como alimento al ganado de labor».

[26] «Las matemáticas son hoy, más que nunca, una herramienta básica para desenvolverse en un mundo revolucionado por las nuevas tecnologías [...] se comprende el creciente interés que los métodos didácticos orientales están despertando en España. Sus sistemas de cálculo (ábaco incluido) agilizan la mente y desarrollan los dos lados del cerebro.» [*De regreso al ábaco. La pedagogía de las matemáticas en España sigue ofreciendo resultados mediocres*, El País, 7/4/2013]; «Realizan sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de hasta 17 dígitos y pueden recitar la tabla de multiplicar de cualquier número de dos dígitos, así como descubrir cuál fue el día del nacimiento de cualquier persona.» [*Las cuentas que vienen del pasado. Los hermanos Ronit y Samir Motwani, campeones del mundo de cálculo, demuestran sus habilidades en A Coruña*, La Opinión, 6/4/2013]

JOSÉ MARÍA BARJA PÉREZ
Facultade de Informática, UDC
<j.m.barja@udc.es>

gamma colaboracións

Breve dicionario etimolóxico da matemática escolar (e IV)

LUIS PUIG MOSQUERA
JUAN BLANCO ROUCO

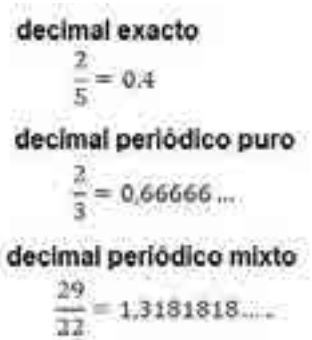
Como sucede con moitas palabras de uso común que nada teñen que ver coas matemáticas, en numerosas ocasións a linguaxe desta disciplina recorre a vocábulos dos que principalmente atopamos a súa orixe no grego ou no latín e, outras veces, no árabe.

Palabras chave: Dicionario, Etimoloxía, Grego, Árabe, Latín, Matemáticas.

Breve dicionario etimolóxico da matemática escolar (IV)
As it happens with many commonly used words that have nothing to do with Mathematics, in quite a lot of occasions the language of this subject uses words whose origin is mamminly found in the Greek, Latin and sometimes Arabic languages.

Key words: Dictionary, Etymology, Greek, Arabic, Latin, Mathematics.

Aquí remata esta colaboración, que completa a serie iniciada xa no número dez da revista, consistente nun pequeno dicionario etimolóxico de termos usuais na matemática escolar. A pretensión da mesma non foi outra que facilitar a explicación do porqué usamos determinada voz para designar este concepto matemático ou aqueloutra figura xeométrica, non sempre relacionados (voz e concepto) dun xeito evidente. No desenvolvemento das clases, de xeito ordinario xorden vocábulos non sempre coñecidos polo alumnado para designar os diferentes conceptos, que moitas das veces requiren unha mínima explicación etimolóxica por parte do profesor. Ao realizar o insignificante esforzo de aclaralo, favorécese non só a comprensión do vocábulo asociado á idea que alude (ás veces, da idea mesma), senón a mellora da propia formación cultural dos alumnos.



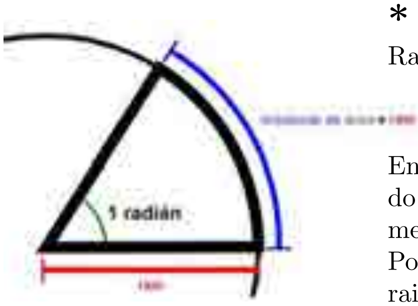
Tres son as posibles expresións decimais dun número racional

* Racional

Ratio ≡ Cálculo, conta
Ratiōnālis ≡ Dotado de razón

	Ratiōnālis	*Rational number*
(latín)	Relativo á razón	Número racional

Un número é *racional* cando pode representarse exactamente como cociente ou *razón* −vocábulo coa mesma orixe− de dous números enteiros, é dicir, como unha fracción p/q, $q \neq 0$. Polo contrario, os números que non poden representarse mediante cociente de dous enteiros chámanse *irracionais*. Ademais de por fraccións, os números racionais poden expresarse tamén mediante expresións decimais: cun número finito ou infinito de cifras, periódicas no segundo caso.



Radián: ángulo que abrangue a lonxitude dun arco igual ao raio dunha circunferencia.

* Radián

Radĭus ≡ Compás do xeómetra, raio

	Radĭus	*Radian*
(latín)	Raio	Radián

Enténdese por *radián* o ángulo no que a medida do arco é igual á medida do *raio* nunha circunferencia, situando o ángulo no centro. É a unidade de medida dos ángulos no Sistema Internacional.
Posto que a lonxitude da circunferencia é o produto da lonxitude do seu raio por 2π, resulta que o ángulo da circunferencia completa (360°) equivale a 2π radiáns.

Radius (latín) → *Radian* (inglés) → *Radián*

* Raio

Radĭus ≡ Raio, vara que vai do eixo á circunferencia da roda

	Radĭus	*Radius*
(latín)		Raio

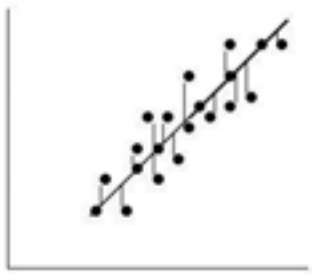
Un *raio* é un segmento que une o centro dunha circunferencia a calquera punto dela, ou o centro dunha esfera a calquera punto da súa superficie.

* Rectángulo

Rectus ≡ Recto
Angŭlus ≡ Ángulo
Rectiangulum ≡ Rectángulo

	Rectiangulum	*Rectangle*
(latín)		Rectángulo

Un *rectángulo* é un paralelogramo con todos os ángulos iguais (rectos, 90°) e os lados contiguos desiguais. Un *triángulo* é *rectángulo* cando un dos seus ángulos é recto (90°).



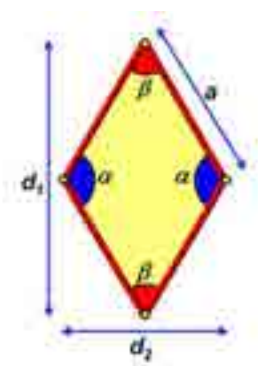
A *recta de regresión* verifica que é mínima a suma de cadrados das diferenzas entre as ordenadas dos puntos dados e as dos puntos da recta coa mesma abscisa.

* Regresión

Regredior ≡ Volver atrás, regresar
Regressĭo ≡ Retorno

	Regressĭo	*Linear regression*
(latín)	Retorno	Regresión lineal

Para aproximar unha nube de puntos mediante unha recta, un procedemento usual é o de *regresión linear*. Este método, de frecuente uso no ámbito estatístico, coñécese con este nome porque ao comparar a estatura de pais e fillos, resultou que os fillos cuxos pais tiñan unha estatura moi superior ao valor medio tendían a igualarse a este, mentres que aqueles cuxos pais eran moi baixos tendían a reducir a súa diferenza respecto da estatura media; é dicir, *regresaban* á media.



Un rombo é un paralelogramo de lados iguais, as diagonais son perpendiculares e os seus ángulos opostos son iguais.

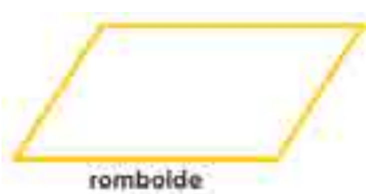
* Rombo

Rhémbein ≡ Dar vueltas
Rhómbos ≡ Obxecto aproximadamente circular

	Rhómbos	*Rhombus*
(grego)	Obxecto redondeado	Rombo

O vocábulo grego *rhómbos* procede do verbo *rhémbein* (rodar) e aplícase a un obxecto que é quen de rodar. Na xeometría, un rombo é un paralelogramo cos catro lados iguais que non é rectángulo. Nun rombo son iguais os ángulos opostos e as súas diagonais córtanse perpendicularmente.

Rhómbos (grego) → *Rhombus* (latín) → *Rombo*

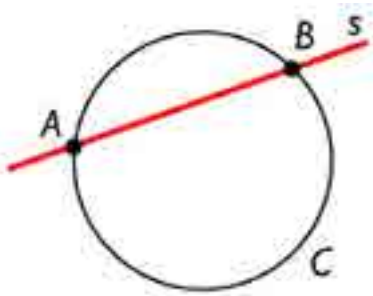


* Romboide

Rhómbos ≡ Rombo
Eĩdos ≡ Forma, aspecto que presenta un obxecto

	Rhomboïdēs	*Rhomboid*
(grego)	Con forma de rombo	Romboide

En anatomía, un romboide representa un músculo do torso; en matemáticas, un romboide é un paralelogramo cuxos lados e ángulos contiguos son desiguais. É dicir, é un paralelogramo que nin é rombo nin rectángulo.

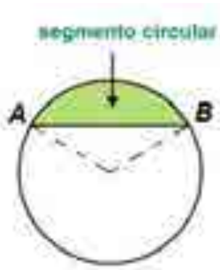


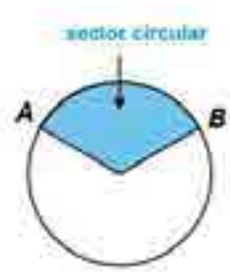
* Secante

Seco ≡ Cortar, partir
Secans -tis ≡ Que corta

	Secāntis	*Secant*
(latín)	Que corta	Secante

Unha liña ou superficie que corta a outra liña ou superficie denomínase *secante*. Na figura, a recta s é secante á circunferencia C, xa que a *corta* nos puntos A e B.
Con relación a un ángulo, no ámbito da trigonometría, a *secante* tamén é a razón inversa do coseno do mesmo.





* Sector

Seco ≡ Cortar
Sectio ≡ Corte, sección

	Sectio	*Sector*
(latín)	Corte	Sector

Denomínase *sector circular* á porción de círculo comprendida entre un arco de circunferencia (segmento circular) e dous dos seus raios.

* Segmento

Sectum ≡ Cortado
Segmentum ≡ Franxa, segmento

	Segmentum	*Segment*
(latín)	Franxa	Segmento

Nunha liña recta un *segmento* é un fragmento da mesma comprendida entre dous extremos, chamados extremos. No caso dun círculo, un *segmento circular* é a porción comprendida entre o segmento rectilíneo $\overline{AB}$ e o arco de circunferencia comprendido entre os puntos A e B, tal como pode apreciarse na figura.

* Segundo

Sequire ≡ Seguir
Secundus ≡ Que segue a outro

	Secundus	*Second*
(latín)	O seguinte	Segundo

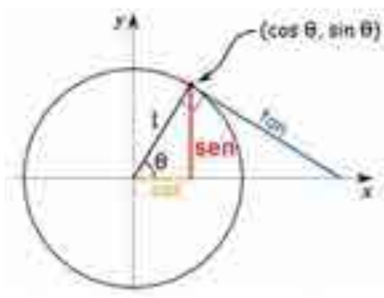
Un *segundo* é cada unha das sesenta partes iguais en que se divide cada *minuto* do círculo (ou de tempo). *Minuto*, provén de *minuta*, palabra clave extraída de *pars minuta prima*, primeira parte pequena que se obtén ao dividir o arco da circunferencia completa en sesenta partes iguais. Se cada minuto, de novo, o dividimos en sesenta partes iguais, obtemos as *pars minuta secunda*, segunda parte pequena, abreviadamente *segunda*, que derivou en *segundo*.

* Seno

Sĭnus ≡ Cavidade, baía, seno

	Sĭnus	*Sinus*
(latín)	Cavidade	Seno

Que o vocábulo *seno* proceda do latino *sĭnus* non é obxecto de discusión, porén non hai unanimidade en canto ao xeito de chegar até *sĭnus*. Unha explicación baséase no feito de que o *seno (sen)* dun ángulo representa a metade da corda subtendida por un determinado ángulo central (θ, na figura) nunha circunferencia.



Segundo esta versión, en latín a corda do círculo chamábase *inscripta corda*, ou simplemente *inscripta*; e a metade da corda denominábase *semis inscriptae*, que de xeito abreviado tomou a forma *sins*. Finalmente, para podela usar como palabra latina, mudou a *sinus*.

Semis inscriptae (latín) → *Sins* (abreviatura) → *Sinus* (latín) → *Seno*

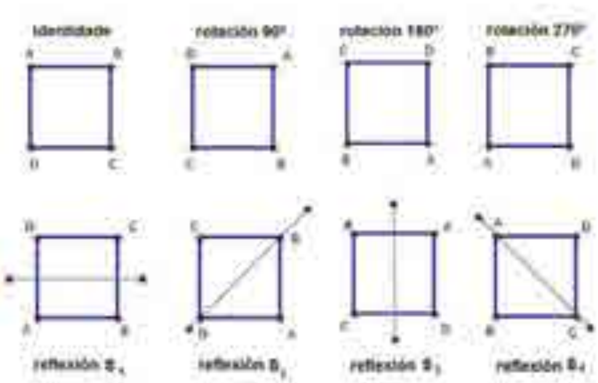
A outra interpretación provén do termo *ardhá-jya* (*ardhá*, metade; *jya*, corda) que na matemática hindú se usaba xa no século V para designar o seno. Despois das traducións árabes, o termo sánscrito *jya* foi erroneamente interpretado por *jiab* en lugar de *jaib*, resultado de bailar as vogais. *Jiab* significa baía e, deste xeito, traduciríase ao latín por *sinus*.

Ardhá-jya (sánscrito) → *Jiab* (árabe) → *Jaib* (árabe) → *Sinus* (latín) → *Seno*

* Simetría

Sýn ≡ Con
Métron ≡ Medida
Symmetríā ≡ Con proporción

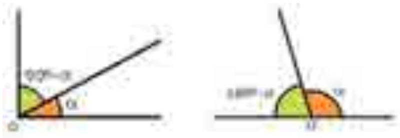
	Symmetríā	*Symmetry*
(grego)		Simetría



Un cadrado ($ABCD$) permanece invariante cando se realiza nel calquera das oito transformacións que aparecen na figura. Coa operación de composición, todo o seu conxunto constitúe o grupo de simetrías do cadrado.

O termo *simetría* provén do grego *symmetríā*, indica proporción adecuada das partes dun todo entre elas e con todo o conxunto. Nas matemáticas, máis concretamente na xeometría, un obxecto está dotado de simetría cando permanece invariante se realizamos certo tipo de transformacións xeométricas nel: rotación e reflexión, entre outras.
Outra acepción de *simetría* é a dunha transformación xeométrica que, a un punto M, fai corresponder un punto M' tal que o segmento MM' posúe un punto fixo como centro (*simetría con respecto a un punto* ou *simetría central*), unha recta como mediatriz (*simetría con respecto a un eixe* ou *simetría axial*), ou un plano fixo como plano mediano (*simetría especular*).

Symmetríā (grego) → *Symmetrĭa* (latín) → *Simetría*



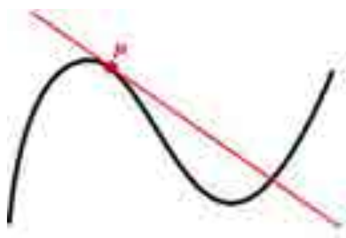
Os ángulos complementarios suman 90°; os suplementarios, 180°.

* Suplementario

Supplere ≡ Suplir, completar
Supplēmentum ≡ O que falta para completar

	Supplēmentum	*Supplementary angle*
(latín)	Suplemento	Ángulo suplementario

Dous ángulos son *suplementarios* cando a súa suma é igual a dous rectos (180°), é dicir, *o que lle falta para completar* 180°. Polo tanto, o *suplementario* do ángulo α será $\beta = 180^\circ - \alpha$.



* Tanxente

Tango ≡ Tocar
Tangens -ēntis ≡ Que toca

	Tanges	*Tangent straight line*
(latín)	Que toca	Recta tanxente A

recta tanxente a unha curva nun punto P é unha recta que, ademais de pasar polo devandito punto P, ten a mesma pendente que a curva. É dicir, a *tanxente toca* á curva nese punto.

* Teorema

Theós ≡ Deus
Theōrēma ≡ Proposición que necesita demostración

	Theōrēma	*Theorem*
(grego)		Teorema

Un *teorema* é unha proposición demostrable a partir doutros teoremas xa probados ou *axiomas* mediante as regras de inferencia aceptadas. O teorema máis universal é, sen dúbida, o de Pitágoras: "Nun triángulo rectángulo, o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos".

Theōrēma (grego) → *Theorēma* (latín) → *Teorema*

* Tese

Tithēmi ≡ Colocar, arquivar
Thésis ≡ Situación, conclusión

	Thésis	*Thesis*
(grego)	O que se propón	Tese

O vocábulo grego *thésis*, antecedente de *tese*, emprégase significando "o afirmado", "o que se propón". Con relación a un teorema, a *tese* é unha afirmación que está demostrada.

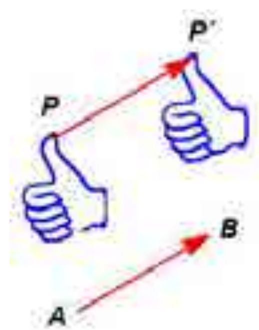
Thésis (grego) → *Thesis* (latín) → *Tese*

* Transcendente

Transcendĕre ≡ Exceder, transcender
Transcēndens, Transcendēntis ≡ Que transcende

	Transcendēntis	*Transcendental number*
(latín)	Que trascende	Número transcendente

Transcender é saír fóra dun ámbito. Para o caso dun número real, cando é raíz dunha ecuación polinómica de coeficientes enteiros, denomínase alxébrico. Cando non é raíz de ningunha ecuación dese tipo, chámase *transcendente*. Os números π ou e son *transcendentes*. Pola contra, $\sqrt{2}$ é un número alxébrico xa que é raíz da ecuación: $x^2 - 2 = 0$

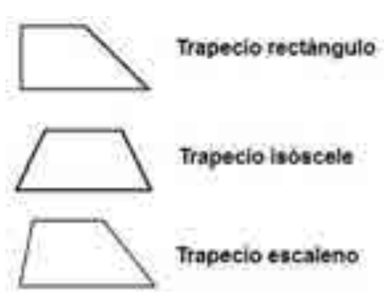


* Translación

Translātus ≡ Acción de trasladar
Translātio -ōnis ≡ Traslado

	Translātio	*Translation*
(latín)		Translación

Tanto no plano coma no espazo unha *translación* é unha isometría que está definida por un vector $\overrightarrow{AB}$. A cada punto (P) faille corresponder outro (P'), de xeito que o vector $\overrightarrow{AB}$ ten o mesmo módulo, dirección e sentido que o vector $\overrightarrow{PP'}$; é dicir, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PP'}$ son vectores equipolentes. Unha *translación* é unha isometría positiva, tanto no plano como no espazo pois, ademais de conservar as distancias e os ángulos, mantén a orientación destes últimos.



* Trapecio

Tetra ≡ Catro
Péza ≡ Pé
Trápeza ≡ Pequena mesa, con catro pés

	Trápeza	*Trapezium (UK)* *Trapezoid (US)*
(grego)		Trapecio

Un *trapecio* é un cuadrilátero irregular con dous lados paralelos (bases) que son desiguais. Un trapecio é rectángulo se un lado é perpendicular ás bases; é isóscele se son iguais os seus lados non paralelos. Noutro caso, chámase escaleno.

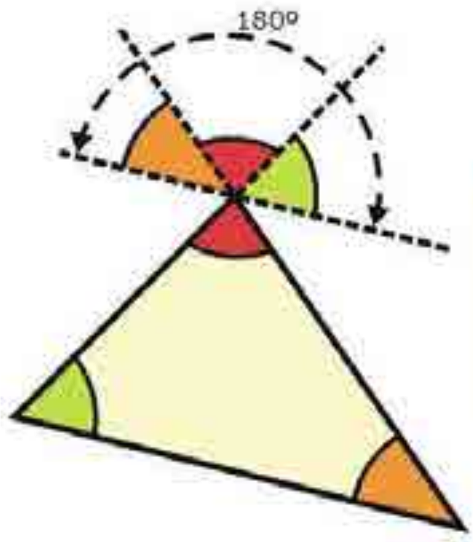
Tetrápeza (grego) → *Trápeza* (síncopa) → *Trapezĭum* (latín) → *Trapecio*

* Trapezoide

Trápeza ≡ Trapecio
Eīdos ≡ Forma
Trapezoeidēs ≡ Con forma de trapecio

	Trapezoeidēs	*Trapezoid (UK)* *Trapezium (US)*
(grego)		Trapezoide

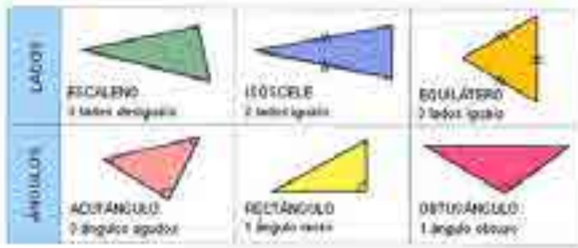
Un *trapezoide* é un cuadrilátero irregular que carece de lados paralelos. Convén observar que os usos dos termos *trapezium* e *trapezoid* están exactamente invertidos no inglés británico e no estadounidense.



* Triángulo

Tri ≡ Tres
Angulus ≡ Ángulo
Triangŭlus ≡ Triángulo

	Triangŭlus	*Triangle*
(latín)		Triángulo



Un *triángulo* é un polígono de tres lados. Igualmente, cada *triángulo* ten tres ángulos que suman 180º. Segundo os seus lados, clasifícanse en: escalenos, isósceles e equiláteros; segundo os seus ángulos en: acutángulos, rectángulos e obtusángulos.

Trigōno (grego) → *Triangŭlus* (latín) → *Triángulo*

* Trigonometría

Trigōno ≡ Trígono, triángulo
Metron ≡ Medida

	Trigōno metron	*Trigonometry*
(grego)	Medición dos triángulos	Trigonometría

A *trigonometría* é a parte da xeometría que trata do cálculo ou medición dos elementos dos triángulos. Esténdese a outras figuras, tanto no plano como no espazo.

* Trivial

Trivĭum ≡ Trivio, lugar no que se atopan tres camiños
Triviālis ≡ Vulgar, ordinario, coñecido por todos

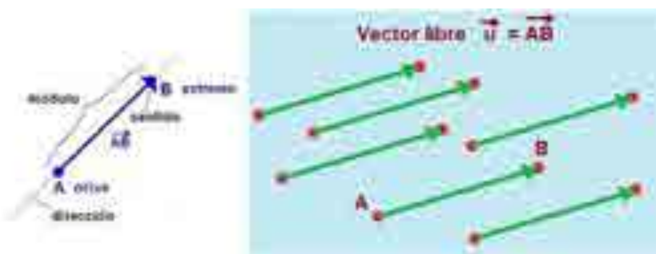
	Triviālis	*Trivial*
(latín)	Común, ordinario	Trivial

O adxectivo *triviālis* (común, ordinario) aplicábase ás tres artes liberais que compoñían o *trivium* (as tres vías: gramática, dialéctica e retórica), posiblemente porque eran consideradas menos importantes, máis comúns, fronte ao *quadrivium* (aritmética, música, xeometría e astronomía). Tanto o trivium como o quadrivium estudábanse nas universidades medievais.
En matemáticas, o vocábulo *trivial* úsase con diferentes acepcións. Deste xeito, un *obxecto trivial* é o que ten unha estrutura moi simple: o conxunto baleiro, o que non ten elementos, é o *conxunto trivial*. Trivial refírese tamén á solución máis elemental dunha ecuación, por exemplo: $x = y = 0$ é a *solución trivial* da ecuación $x + y = 0$. Outro uso de *trivial* dáse nas demostracións, para cualificar un paso da mesma que requira un argumento moi elemental na súa proba e que, polo tanto, evita a súa presentación.

* Vector

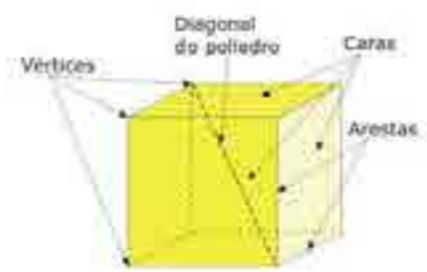
Vehĕre ≡ Transportar, conducir
Vector -ōris ≡ O que conduce, o que transporta

	Vector	*Vector*
(latín)	O que conduce	Vector



Un vector fixo, $\overrightarrow{AB}$, está suxeito á súa orixe e ao seu extremo. Todos os vectores fixos que coincidan con $\overrightarrow{AB}$ en módulo, dirección e sentido, constitúen un único vector libre: $\overrightarrow{u}$, do que $\overrightarrow{AB}$ non é máis que un dos seus infinitos representantes.

Un *vector fixo* ($\overrightarrow{AB}$) é un segmento orientado. O primeiro punto chámase orixe (A); o segundo, extremo (B). As tres características dun *vector fixo* son: módulo, dirección e sentido. Dado un vector fixo arbitrario, todos os vectores que teñan o seu mesmo módulo, dirección e sentido, dicimos que son equipolentes. Deste xeito aparece o concepto de *vector libre*, formado por todos os vectores equipolentes entre si. Cada *vector libre*, $\overrightarrow{u}$, está representado por un *vector fixo* con orixe en calquera punto, do plano ou do espazo segundo a xeometría que estivésemos a tratar. O conxunto de *vectores libres* coa suma e produto por escalares constitúe un *espazo vectorial*.



* Vértice

Vertere ≡ Xirar
Vertex -ĭcis ≡ O punto máis alto, cumio

	Vertex	*Vertex*
(latín)	Cumio	Vértice

Un *vértice* é un punto dun obxecto xeométrico no que dúas ou máis liñas se atopan. Comunmente fálase de vértices dos polígonos ou dos poliedros. Un *vértice*, contrariamente ao significado do seu antecedente latino *vertex*, non ten que ser o punto máis alto.

* Volume

Volvĕre ≡ Volver, xirar
Volūtum ≡ Enrolado
Volūmen -inis ≡ Obxecto formando un rolo, rima de obxectos

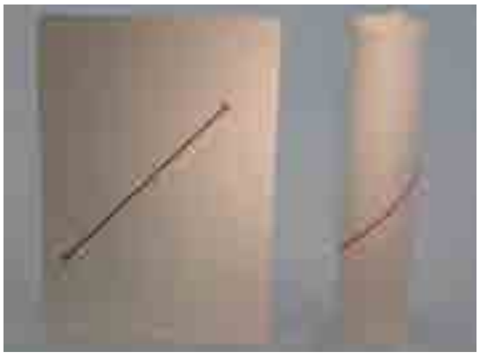
	Volūmen	*Volume*
(latín)		Volume

Usado para describir o grosor ou tamaño dun obxecto, o *volume* dun sólido é a medida do espazo que ocupa. No Sistema Internacional a unidade de medida do *volume* é o metro cúbico (m^3).

* Xeodésica

Ghē ≡ Terra
Dáiō ≡ Parto, divido
Geōdaisía ≡ Dividir a terra

	Geōdaisía	*Geodesic*
(grego)	Dividir a terra	Xeodésica



No plano, as liñas xeodésicas son rectas. Porén, nun cilindro, como pode comprobarse ao envolver a folla, as xeodésicas son espirais.

Para Aristóteles a *Geōdaisía*, *Xeodesia* para nós, podía referirse ás divisións, tanto xeográficas da Terra como ás dun terreo entre propietarios. A *Xeodesia* estuda basicamente a forma e dimensións da Terra en territorios extensos, a diferenza da Topografía, que actúa sobre pequenas dimensións.
En canto ás matemáticas, sobre unha superficie dada, a *xeodésica* é a liña que consegue a mínima distancia entre dous puntos dados. As *xeodésicas* no plano son as liñas rectas; sobre a esfera, as *xeodésicas* son os círculos máximos.

Geōdaisía (grego) → *Xeodesia* → *Xeodésica*

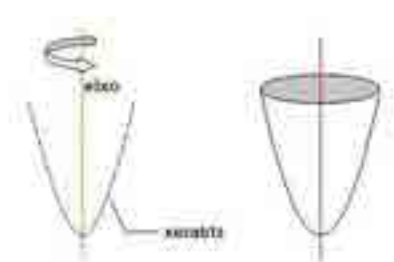
* Xeometría

Ghē ≡ Terra
Métron ≡ Medida
Geōmetria ≡ Xeometría

	Geōmetria	*Geometry*
(latín)	Medida da terra	Xeometría

A *xeometría* é o estudo das figuras nun espazo dun número determinado de dimensións. Os tipos máis comúns de xeometrías son a *xeometría plana* (estuda obxectos como o punto, a recta, o círculo, o triángulo ou o polígono), a *xeometría do espazo* (estuda obxectos como a recta, a esfera ou os poliedros), e a *xeometría esférica* (estuda obxectos como os triángulos esféricos). A xeometría formaba parte do Quadrivium, que se ensinaba nas universidades medievais.

Geōmetria (grego) → *Geometrĭa* (latín) → *Xeometría*



Cando xira unha parábola ao redor do seu eixo, xera un paraboloide. Neste caso, a parábola é a xeratriz.

* Xeratriz

Generāre ≡ Xerar, producir
-trix ≡ A que fai
Generātrix -īcis ≡ A que xera

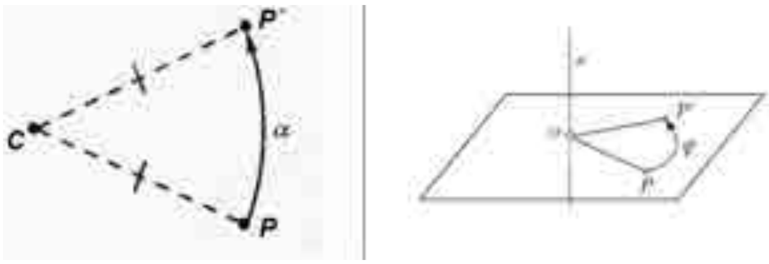
	Generātrix	*Generatrix*
(latín)	A que xera	Xeratriz

Chámase xeratriz á liña ou á figura que é xeradora dunha superficie ou un sólido, respectivamente. Unha superficie de revolución está xerada polo xiro dunha curva plana, xeratriz, ao redor dunha recta, directriz, que fai de eixe da rotación.

* Xiro

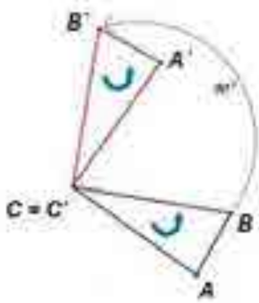
Gŷros ≡ Círculo, bóla
Gȳrus ≡ Movemento circular

	Gŷros	*Rotation*
(grego)	Círculo	Xiro



Á esquerda, un xiro no plano, con centro C e amplitude α. Á dereita, xiro no espazo, con eixe e e amplitude φ.

No plano, un *xiro* é unha isometría (grego: *iso* ≡ igual, *métron* ≡ medida), que deixa fixo un só punto, C (*centro do xiro*), e a cada outro punto do plano (P) faille corresponder outro (P') coas seguintes condicións: a lonxitude do segmento $\overline{CP}$ é a mesma que a lonxitude de $\overline{CP'}$ e o ángulo $\widehat{CPC'}$ é constante (α), chamado *ángulo de xiro*.



Os xiros manteñen a orientación das figuras.

No espazo, un *xiro* de eixe e e amplitude φ transforma o punto P no punto P' baixo as condicións: a) o punto P' está no plano que contén a P sendo perpendicular ao eixe, b) a lonxitude do segmento $\overline{OP'}$ ten que ser mesma que a do segmento $\overline{OP}$ e c) $(\widehat{\overline{OP}, \overline{OP'}}) = \varphi$, tal e como pode observarse na figura da dereita. Tanto no plano como no espazo, os *xiros* son isometrías positivas ou directas, é dicir, a figura orixinal e a xirada teñen a mesma orientación ambas as dúas.

Gŷros (grego) → *Gȳrus*(latín) → *Xiro*

Referencias

Bibliográficas

[1] X.A. Area Otero, M. T. Pérez López, *Brevísima historia. De como aprendemos a contar e os aparellos empregados*, Catálogo da exposición, Universidade de Santiago de Compostela, 2008.

[2] J. Coromines, *Breve diccionario etimológico de la lengua castellana*, Gredos, Madrid, 1961.

[3] B. D´Amore, "El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico", *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de matemáticas*, 78, páxs. 10-37, 2008.

[4] G. Ifrah, *Las cifras. Historia de una gran invención*, Alianza Editorial, Madrid, 1987.

[5] X. A. Masa Vázquez (coord.), *Vocabulario de matemáticas. (Galego-español-inglés-portugués)*, Servicio de Normalización Lingüística da Universidade de Santiago de Compostela, 1995.

[6] J. M. Mir (dir.), *Diccionario ilustrado latino-español español-latino Spes Vox*, Bibliograf, Barcelona, 1998.

[7] L. Puig, "Historias de al-Khwārizmī (1ª entrega)", *SUMA*, 58, páxs. 125-130, 2008.

[8] Real Academia Española, *Diccionario de la lengua española, vigésimo segunda edición*, Espasa-Calpe, Madrid, 2001.

[9] E. Serrano Marugán, "Etimología de algunos términos matemáticos", *SUMA*, 35, páxs. 87-96, 2000.

En internet

- Eduardo de Echegaray, *Diccionario General Etimológico de la Lengua Castellana* (cinco vol.)
  - http://archive.org/stream/diccionariogener01echeuoft#page/n5/mode/2up
  - http://archive.org/stream/diccionariogener02echeuoft#page/n5/mode/2up
  - http://archive.org/stream/diccionariogener03echeuoft#page/n5/mode/2up
  - http://archive.org/stream/diccionariogener04echeuoft#page/2/mode/2up
  - http://archive.org/stream/diccionariogener05echeuoft#page/2/mode/2up
- Francisco Cortés, *Pequeño Diccionario Médico Etimológico*, http://biblio3.url.edu.gt/Libros/2011/pec_dicmed.pdf
- *Blog Ciudadano del mundo*, http://ciudadanodelmundo.espacioblog.com/post/2006/10/07/esos-nombres-matematicas
- *Dicionario inglés, etimoloxías, tradución e outras posibilidades*, http://dictionary.reference.com/
- F. Cuéllar, *Blog Español internacional*, http://espanolinternacional.blogspot.com/2009/04/matematicas.html
- *A orixe das palabras*, http://etimologias.dechile.net/
- *Galizionario, Categoría: Matemáticas*, http://gl.wiktionary.org/wiki/Categor%C3%ADa:Matem%C3%A1ticas
- IES García Morato, *Diccionario etimológico*, http://ies.garciamorato.madrid.educa.madrid.org//Diccionario.htm
- Eric Weisstein, *Wolfram MathWorld*, http://mathworld.wolfram.com/
- MEC, *Etimología de algunas palabras de uso frecuente en matemáticas*, http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/etimologia.htm
- M. José García Cebrián, *Glosario ilustrado de términos matemáticos*, http://www.catedu.es/matematicas_blecua/glosa/glosario_pral.htm
- Alexander Bogomolny, *Math Glossary, Math Terms*, http://www.cut-the-knot.org/glossary/atop.shtml
- Francisco Cortés Gabaudan (coord.), *Diccionario médico-biológico, histórico y etimológico*, http://dicciomed.eusal.es/
- *Dicionario enciclopédico*, http://www.diccionarios.com/
- Diario El País, *Diccionarios*, http://www.elpais.com/diccionarios/castellano/
- *Páxina web Epsilones*, http://www.epsilones.com/paginas/t-etimologias.html#inicio
- Francesco Bonomi, *Vocabolario Etimologico della Lingua Italiana*, http://www.etimo.it/?term=&find=Cerca
- Douglas Harper, *Online Etymology Dictionary*, http://www.etymonline.com/
- Junta de Andalucía, *Esos nombres*, http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso1998/accesit3/esos.htm

- Editorial Santillana, *Tareas y más*, http://www.tareasymas.es/contenidos/matematicas
- *My Etymology*, http://www.myetymology.com/
- Real Academia Galega, *Dicionario da Real Academia Galega*, http://www.realacademiagalega.org/dicionario#inicio.do
- A.P.Ricieri, *Pequeno dicionário etimológico Prandiano*, http://www.scribd.com/doc/2972489/Mathematics-Dictionary-Dicionario-Etimologico-Matematica
- *Páxina web Las matemáticas de Mario*, http://www.lasmatematicasdemario.com/
- Tooling University, *Taller Básico (español) de Matemáticas*, http://www.toolingu.com/dept-801-taller-basico-espanol-training.html
- Fernando Lafarga Colubi, *Breve diccionario etimológico de términos geométricos*, http://www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/IIIJornadas/pdf/Part64.PDF

Referencias consultadas por última vez o 3 de agosto de 2014.

LUIS PUIG MOSQUERA
IES Sofía Casanova - Ferrol
<luispuig@edu.xunta.es>

JUAN BLANCO ROUCO
IES Sofía Casanova - Ferrol
<jbrouco@yahoo.es>

Unha experiencia e-Twinning de Matemáticas e ELE[1]:

Matemáticas para viaxar ás cidades (in)visibles

Mª DEL CARMEN BUITRÓN PÉREZ
OLGA MARTÍNEZ CANCELAS

Este proxecto está destinado a un grupo de estudantes do ensino secundario de distinta procedencia xeográfica, social e cultural. Combina o traballo nun escenario real, como é unha cidade en si mesma, coa experiencia de traballo nunha contorna virtual. Permitiulles aos estudantes coñecer o noso patrimonio común da UNESCO e foi tamén unha ponte para o intercambio cultural e para achegar a Matemática nun contexto multilingüe e mesmo desde un punto de vista emocional.

Palabras chave: Competencias, Matemáticas, plurilingüismo, elearning, UNESCO.

Unha experiencia e-Twinning de Matemáticas e ELE

This project is aimed at a group of secondary school students from different geographical, social and cultural backgrounds. It combines the work in a real scenario as it is a city itself with the experience of working in a virtual environment. It has enabled them to know our Common Heritage of UNESCO and it has been also a bridge for cultural exchange and to approach Mathematics from a multilingual context and even from an emotional standpoint.

Key words: Competences, Mathematics, multilingualism, elearning, UNESCO.

1. Introdución

A iniciativa que presentamos é un traballo de colaboración interdisciplinar entre dous institutos de educación secundaria europeos, enmarcada nunha acción e-Twinning desenvolvida no curso académico 2012-2013.

Desde a súa adhesión á Unión Europea, os gobernos dos seus estados membros foron levados a impulsar melloras e redefinir os seus sistemas educativos tratando de crear un sistema que permita comparar, espallar, avaliar as competencias básicas e as mellores metodoloxías para a súa adquisición, nalgúns casos con reformas pouco afortunadas.

Nun marco internacional máis amplo, na OCDE[2] xurdiron proxectos como DeSeCo[3] para a definición e selección de competencias esenciais que axuden a individuos e a sociedades a alcanzar as súas metas. A propia OCDE establece o tan cuestionado programa PISA[4] para levar a cabo a organización e implementación de diversas tarefas de avaliación do rendemento dos estudantes.

[1] Español Lingua Estranxeira.
[2] Organización para a Cooperación e Desenvolvemento Económicos.
[3] Definición e selección de competencias clave.
[4] Programa internacional para a avaliación de estudantes.

Paralela a estas iniciativas que tratan de cuantificar a práctica educativa, atópase a nosa realidade cotiá na aula, esa que nos permite recoñecer a diversidade dos nosos/as estudantes, detectar a existencia neles e nelas de intelixencias diversas, tal como propuña o profesor Howard Gardner na súa *Teoría das Intelixencias Múltiples* (1983), modos diferentes de comprender a realidade, nos que non só son importantes os aspectos cognitivos na adquisición do coñecemento, senón o papel da personalidade, as emocións e o contexto cultural no que se desenvolven.

Por outra banda, xa en 1959, o teólogo, filósofo e pedagogo checo Jan Amos Komenský (considerado por moitos o Pai da Pedagoxía moderna) na súa obra *Orbis Sensualium Pictus* (O mundo sensible en imaxes) introduciu de xeito prematuro o valor do audiovisual na educación. Hoxe en día, o potencial das tecnoloxías en xeral, e do audiovisual en particular, nun escenario de aprendizaxe é incuestionable, se ben, citando a Cabero: "hai que ver as tecnoloxías como medio e recurso didáctico, mais non como a panacea que resolverá as problemáticas dentro do ámbito educativo".

Partindo das anteriores premisas, o proxecto *Matemáticas para viaxar ás cidades (in)visibles* ofrece aos alumnos un escenario multimedial para que descubran a través da exploración dunha cidade, as múltiples ópticas desde as cales esta pode ser analizada: matemática, artística, literaria, social, emocional,... conectando de maneira directa cos aspectos de adquisición de competencias anteriormente citados.

Existen precedentes de experiencias similares que buscan a contextualización das matemáticas nun espazo urbano en distintas comunidades españolas como os Paseos Matemáticos, a Fotografía Matemática de rúa, etc,... mais esta proposta combina o traballo nun escenario "real" como é o da propia cidade coa experiencia de traballo nun escenario virtual (a plataforma Twinspace), que contén recursos multimedia variados facilitadores do propio contacto entre estudantes de realidades xeográficas, sociais e culturais diferentes. Preséntase aos alumnos/as como unha oportunidade para coñecer o noso Común Patrimonio da UNESCO, pero tamén como unha ponte de intercambio cultural e de achegamento a diversas disciplinas académicas, como pode ser o caso máis concreto das matemáticas, descubrindo a súa dimensión emocional – un interesante aspecto desenvolvido por Inés María Gómez Chacón en *Matemática emocional* (2000).

2. A proposta

TÍTULO

O título do proxecto está inspirado na obra do escritor Italo Calvino *As cidades invisibles* (1972), quen á súa vez reinterpreta as viaxes de Marco Polo. "Explora todas as costas e busca esa cidade. Despois volve para dicirme se o meu soño resposta á verdade", ordénalle Kublai Khan a Marco Polo en *as cidades invisibles*, o relato de Italo Calvino que convida a emprender a marabillosa viaxe dos mundos imaxinarios. Un relato que abre as portas a esa diversidade de miradas das cidades (cidade visible vs cidade invisible). Cada cidade fálanos, precisamente como resultado dun diálogo aberto entre ela e os seus cidadáns, que alimentan un intercambio cultural permanente cos que nos achegamos a ela como visitantes ou viaxeiros. Unha interesantísima aportación á explotación didáctica desta obra na aula de matemáticas, e en particular ao noso proxecto, foi tamén a colección de artigos *En las ciudades invisibles* de Miquel Albertí Palmer na revista *SUMA* (Números 53-61).

IDIOMA

O proxecto desenvólvese en español, lingua que os alumnos galegos utilizan para comunicarse co grupo checo e viceversa. Os alumnos do centro checo cursan o seu segundo ano de estudos de español como lingua estranxeira así que algúns materiais de apoio e recursos tamén foron proporcionados en checo, para facilitar a comprensión de aspectos matemáticos ou literarios máis complexos. En cada grupo os estudantes relaciónanse entre si na súa lingua materna, galego e checo respectivamente. Algunhas publicacións xerais no Twinspace

(Proposta de Proxecto, Blog e Diario de Proxecto) fanse en inglés para dar maior difusión ao mesmo a nivel internacional.

PARTICIPANTES

Alumnos partipantes: 44, idades: 14-15 anos.

TEMPORALIZACIÓN

Febreiro a Xuño de 2013.

PROCESO DE TRABALLO

Os alumnos, traballando en pequenos grupos, exploran e describen cidades de España e República Checa, relacionando aspectos urbanos, arquitectónicos, paisaxísticos, históricos, turísticos,... coas matemáticas, astronomía, cinema, literatura, tecnoloxía, expresión plástica e audiovisual,... todo iso integrado nun mesmo proxecto.

Como actividade final, cada grupo crea a súa propia cidade imaxinaria.

O traballo desenvólvese a través da plataforma de colaboración Twinspace, combinando os recursos que este espazo proporciona (wiki, foro, chat,...) con outros externos: (Webquest, Skype,...).

Desde o punto de vista das matemáticas, é unha forma de traballar comprendendo que estas forman parte da cultura das civilizacións e que están presentes en todo tipo de situacións cotiás, por exemplo, ao percorrer unha cidade.

Desde o punto de vista do estudo do Español como Lingua Estranxeira (ELE) é unha nova forma de coñecer e achegarse ao idioma e á cultura española, aprendendo vocabulario específico de matemáticas en español.

ETAPAS DO PROXECTO E METODOLOXIA

ETAPA 0: Planificación e deseño do proxecto entre o centro español e checo (a través de videoconferencia).

ETAPA 1: Presentación das cidades (in)visibles.

Seleccionánse doce cidades europeas: seis españolas (Barcelona, Granada, Madrid, Santiago de Compostela, Toledo e Valencia) e seis checas (Brno, *Český* Krumlov, Lednice, Praga, Telč e Žd'ár nad Sázavou.). O criterio para elixir estas cidades foi ser cidades patrimonio da UNESCO[5], ou ben que nelas existise algún monumento listado por este organismo.

Metodoloxía:
Os alumnos, traballando en pequenos grupos preparan:

- Unha postal adiantando algunhas ideas relacionadas coas matemáticas coas que traballan máis adiante en cada unha das cidades elixidas. A idea é facer un cartel dixital con estas postais para incorporar na plataforma Twinspace.

- Unha presentación breve en formato dixital con datos básicos dunha das cidades: localización, número de habitantes, algún apuntamento histórico,.... O obxectivo é presentarse a través de videoconferencia e dar a coñecer aos demais cada unha destas cidades (para as presentacións: Openoffice Impress, Powerpoint, Prezi, Slideshare..., para a videoconferencia Skype). As presentacións incorpóranse despois a un blog na plataforma Twinspace para que todos poidan velas offline, enviarse comentarios, suxestións e correccións sobre elas.

[5]Organización das Naciones Unidas para a Educación, a Ciencia e a Cultura.

ETAPA 2: Descubrimos as matemáticas nalgunhas cidades checas/españolas.

I. **Cidades checas**

Nesta actividade o obxectivo é que os mozos e mozas descubran conceptos matemáticos que se poden atopar nestas cidades, ademais de explorar outros aspectos urbanísticos, históricos, artísticos...

Esta parte está preparada para o grupo de alumnos e alumnas checos da seguinte forma:

Deseñouse unha unidade didáctica en formato dixital (PDF) na que se describen as tarefas que deben realizar os alumnos en cada cidade.

No conxunto de propostas destas unidades didácticas tentouse que os alumnos traballen diversas competencias dentro das áreas de aritmética, xeometría, análise e/ou álxebra.

Os recursos utilizados nesta actividade foron diversos: computadores, ipad, programas de xeometría dinámica (Geogebra), vídeo,... e tamén materiais manipulativos: cartas, escarvadentes, cordas, planos,...

Os temas desenvolvidos en cada cidade cítanse a continuación:

* **Brno**: A vila Tugendhat en Brno. A Bauhaus e Mies Van der Rohe. A construción do rectángulo áureo. O rectángulo áureo na VillaTugendhat. A cruz grega e o cadrado. Os mosaicos de Escher. Comentario final e conclusións.
* **Český Krumlov:** Circunferencia, elipse, hipérbola e parábola. Apolonio de Perga. Sección dun cilindro. O método do xardineiro. Hypatia. O auditorio rotatorio de *Č*esk*ý* Krumlov. Propiedades acústicas e ópticas dunha elipse. Comentario final.
* **Lednice:** A Universidade de Gregor Mendel e os xardíns de Lednice. O deseño de xardíns e as súas formas xeométricas. O cálculo con fraccións nos xardíns de Lednice. Conclusións.
* **Praga:** Os sistemas de numeración. A civilización babilónica. A medida do tempo no reloxo de Praga. Os números de Schwabacher. Os personaxes do reloxo. A posición do Sol e a Terra. Tycho Brahe, Copérnico, Galileo e Kepler. Comentario final.
* **Telč:** Os movementos no plano: translacións, rotacións, xiros e simetrías. A praza de Tel*č* e as súas casas. Os naipes españois. Máis simetrías en funcións e naipes. Benvida ao mundo das sucesións numéricas. Comentario final e conclusións.
* **Žd'ár nad Sázavou:** O decágono regular e o pentágono regular. A medida áurea. Dalí e o número de ouro. A capela de Zelená Hora en *Ž*d'ár nad Sázavou: formas xeométricas e proporción áurea en Zelená Hora. Conclusións.

Metodoloxía:

Esta tarefa desenvólvese utilizando a wiki que proporciona o Twinspace. Esta é unha das partes do proxecto que necesita maior apoio. Aproximadamente 2-3 sesións na aula para a preparación de cada cidade. O proceso de traballo foi o seguinte: preparación antes da sesión de traballo de cada cidade da unidade en PDF e un guión na wiki cos apartados de cada actividade, que despois os alumnos/as debían cubrir. Para o traballo desenvolvido na aula dividiuse a clase en 5 grupos. Cada unidade tiña entre 4-5 tarefas e unha última actividade de conclusións, así que cada grupo ocupábase de preparar unha destas tarefas e despois facíase unha posta en común. Un dos grupos era finalmente o responsable de subir as conclusións e terminar de editar na wiki o traballo correspondente. Unha vez que os estudantes incorporan toda a información, quedaba dispoñible para que os alumnos españois coñecesen o seu traballo e puidesen incluír comentarios sobre o mesmo.

II. **Cidades españolas**

Esta parte está preparada para o grupo de alumnos e alumnas galegos da seguinte forma:

Preparouse unha unidade didáctica en formato dixital (Webquest) para incorporar no Twinspace na que se describen as tarefas que deben realizar os alumnos en cada unha das cidades españolas:

* **Barcelona:** Parábola ou catenaria: Saberemos máis que Galileo Galilei?
* **Granada:** A bela xeometría da Alhambra.
* **Madrid:** O Escorial: Arte e Ciencia.
* **Santiago de Compostela:** O barroco compostelán.
* **Toledo:** Introdución á notación posicional.
* **Valencia:** A lonxa de Valencia: os seus arcos e columnas.

No conxunto de propostas de traballo tentouse que os alumnos traballen diversas competencias dentro das áreas de aritmética, xeometría, análise e/ou álxebra. Os recursos utilizados nesta actividade foron diversos: computadores, programas de xeometría dinámica (Geogebra),... e tamén materiais manipulativos: construcións de papel, cordas,...

Metodoloxía:

Esta tarefa desenvolvérona en pequenos grupos os alumnos/as principalmente en horario extraescolar. Dedicáronse algunhas sesións na aula para asesoralos sobre o seu traballo, corrección de erros, posta a punto de formatos dixitais para as presentacións,... Os propios estudantes incorporan toda a información que elaboran seguindo as pautas das Webquest ao Twinspace quedando así dispoñible para que os alumnos checos coñecesen o seu traballo e puidesen incluír comentarios sobre o mesmo.

ETAPA 3: ¡Imos de viaxe!

Nesta actividade o obxectivo é que os mozos e mozas planifiquen unha viaxe con gastos, horarios, rutas,... para atoparse nalgunha cidade española. A información foi presentada en formatos diversos: Prezi, Folla de cálculo Excel, vídeo,...

Metodoloxía:

Esta tarefa foi elaborada en pequenos grupos os alumnos/as en casa e despois incorpórase ao Twinspace para que todos sexan partícipes do traballo dos demais e poidan incluír comentarios sobre o mesmo.

ETAPA 4: Os mapas, as escalas, as coordenadas e os vectores.

Esta actividade estaba dirixida especificamente ao alumnado checo. A materia na cal se integrou o proxecto para este grupo de estudantes ten como obxectivo específico a aprendizaxe de “Vocabulario científico en español”, de xeito que o propio proxecto foi aproveitado para desenvolver os contidos concretos do tema de vectores, coordenadas, direccións, escalas e distancias no plano.

Metodoloxía:

Nesta tarefa os alumnos traballan con Google Maps e planos diversos en papel. O principal obxectivo é aprender a expresar en español conceptos relacionados co cálculo de distancias, posición, coordenadas, direccións, vectores...

ETAPA 5: Do microcosmos ao macrocosmos, a xeometría fractal, as cidades imaxinarias.

Esta é a actividade final do proxecto. Nela trátase de facer unha reflexión entre todos sobre todo o traballo desenvolvido e que desta experiencia os estudantes preparen, en pequenos grupos, un relato sobre unha cidade inventada por eles mesmos, incluíndo voluntariamente algún deseño plástico da mesma.

Metodoloxía:

Os alumnos reciben como material algúns fragmentos das cidades invisibles de Italo Calvino −no caso dos alumnos/as checos/as este texto facilítaselles en checo− e tamén algúns fragmentos dos relatos de Marco Polo. Unha vez preparados os traballos e corrixidos publícase unha compilación en formato dixital con todas as historias inventadas.

ETAPA 6: Avaliación e FIN do proxecto.

Actividade final para avaliar e concluír o proxecto. Nesta parte tentamos recoller as impresións xerais dos estudantes a través dunhas enquisas, que eles/as cubriron na aula. Nesa sesión aproveitamos ademais a ocasión para intercambiar con eles opinións sobre o traballo realizado ao longo destes meses. Fíxose unha análise das enquisas, que está dispoñible en formato dixital no espazo de traballo Twinspace.

Cada unha das coordinadoras elaborou un documento cunha avaliación persoal da experiencia, que está tamén a disposición pública no Twinspace, por se poidese resultar de interese.

INTEGRACIÓN DO PROXECTO NOS PLANS DE ESTUDOS

Centro español:

A parte matemática traballada: cónicas, polígonos regulares, aritmética, mosaicos, progresións, número áureo, áreas e perímetros, distancias, vectores, historia das matemáticas,... forma parte do curriculum da materia de matemáticas de 3° ESO. Só a catenaria é un concepto novo, pero coa axuda de Geogebra quedou claro.

Centro checo:

A materia na que se integrou o proxecto é Lingua Española (concretamente a parte de vocabulario científico específico de ciencias, que tradicionalmente no centro imparte un profesor de ciencias). Todas as actividades encaixan perfectamente no plan de estudos desta materia.

COLABORACIÓN ENTRE CENTROS

A colaboración entre os dous centros foi constante e permanente. Deseñáronse todas as actividades conxuntamente entre as coordinadoras de cada centro e fíxose un seguimento continuo en cada centro. Valoráronse conxuntamente as dificultades e a marcha das actividades para detectar problemas e facer os cambios convenientes.

Os estudantes interactuaron a través da videoconferencia e a través do foro (como se pode ver no rexistro de actividade do mesmo) cos compañeiros/as do outro centro, pero tamén entre eles comentado os traballos dos seus iguais. Á marxe do proxecto, por iniciativa dos propios alumnos, intercambiaron os seus contactos persoais de Facebook e algúns seguen en contacto a través deste medio.

A colaboración e asesoramento doutros profesores do centro foi importante para levar a cabo algunhas das tarefas propostas.

USO DAS TIC

Recursos de software e hardware:

Presentacións dixitais con Prezi, Openoffice, Powerpoint, vídeo, slideshare, Picasa, Isuu, Glogster, Gimp,...

Geogebra, Excel, Openoffice calc, Google Maps, Webquest, wiki, blog, Skype.

Dispositivos móbiles: teléfonos, iPad, tradutores dixitais,...

Invención dun café imaxinario: *Café Urbanita* a través dun foro como un lugar de reunión virtual para falar non só do proxecto senón expresarse abertamente e coñecerse máis.

Destacamos nesta parte a importancia da aprendizaxe entre iguais no uso dalgunhas destas ferramentas.

3. Competencias matemáticas

O desenvolvemento e mellora de varias das competencias básicas acádase plenamente no proxecto en diversos eidos: matemáticas, comunicación lingüística e, por suposto, en TIC. Ademais, a contribución á competencia social e cidadá ten unha presenza importante, intrínseca aos proxectos e-Twinning, e de feito é un aspecto destacado polas alumnas e alumnos na avaliación. En canto á competencia cultural e artística é igualmente claro o papel relevante que xogou nesta experiencia e que foi ampliamente desenvolvida. O incremento da autonomía e iniciativa persoal no alumnado foi reflectido con moita claridade no seu xeito de traballar e no proceso de desenvolvemento das diversas etapas do proxecto. Ademais os propios estudantes manifestaron o seu desexo de continuar co traballo, é dicir, a súa vontade de seguir aprendendo.

4. Continuidade e transferibilidade

As cidades sobre as que traballamos foron elixidas por seren patrimonio da UNESCO e/ou con monumentos de interese cultural listados por este Organismo, para poder acoutar o proxecto. No entanto, pola propia natureza da experiencia, trátase dun produto doadamente transferible a calquera outra cidade e mesmo a outros niveis educativos e materias diferentes, engadindo por exemplo actividades concretas á Wiki ou ás Webquest segundo as necesidades. Temos intención de dar continuidade ao proxecto a partir de febreiro de 2014 incluíndo socios de máis países.

5. Conclusións e resultados

O resultado máis satisfactorio é que os alumnos expresasen que desfrutaron traballando en grupo, que lles gustaría continuar en contacto, seguir con este proxecto e mesmo coñecerse persoalmente, co cal un dos importantes obxectivos de e-Twinning de achegamento entre culturas queda plenamente conseguido.

Ademais, o alumnado aprendeu a elaborar o seu propio material, buscar información de forma crítica, desenvolvendo técnicas de comunicación para presentar esa información aos demais, o cal é moi valioso para eles mesmos no futuro e para calquera outra actividade que desenvolvan no centro educativo.

Todos os materiais desenvolvidos no proxecto son de libre acceso a través da dirección web:

http://new-twinspace.etwinning.net/web/p94460/welcome

6. Recoñecementos

O presente proxecto foi recoñecido cun Selo de Calidade Nacional en España e un Selo de Calidade Nacional na República Checa polos Servizos Nacionais de Apoio español e checo respectivamente. Tamén foi galardoado cun Selo de Calidade Europeo polo Servizo Central de Apoio de e-Twinning en Europa.

Este recoñecemento supón un enorme estímulo para todas as persoas que traballamos nesta experiencia, que non sería posible sen o apoio e colaboración de moitos dos nosos compañeiros e compañeiras nos nosos respectivos centros de traballo, da incuestionable ilusión, esforzo e motivación dos alumnos e alumnas que participaron nesta iniciativa e da boa disposición e vontade da dirección dos nosos centros. O noso máis sincero agradecemento a todos eles.

Referencias

Bibliográficas

[1] F. Alaminos, X. Barral, J. Lotz, T. Veser, *Patrimonio del mundo (Europa Meridional)*, Plaza&Janés Editores, S.A. y Verlagshaus Stuttgart, con la colaboración de la UNESCO, 2001.

[2] M. Albertí Palmer, "En las ciudades invisibles i-ix", *SUMA*, Números 53-61, (2006-2009).

[3] I. Calvino, *Las ciudades invisibles*, Siruela, Madrid, 2012.

[4] I. Calvino, *Neviditelna mesta*, Dokořan, Praha, 2007.

[5] R. Dey, J. Holzwarth, J.Lotz, M. Schmidt, T. Veser, *Patrimonio del mundo (Europa central y septentrional)*, Plaza&Janés Editores, S.A. y Verlagshaus Stuttgart, con la colaboración de la UNESCO, 2001.

[6] H. Gardner, *Teoría de las inteligencias múltiples*, Paidos Ibérica, Barcelona, 2005.

[7] I. Gómez Chacón, *Matemática emocional (Los afectos en el aprendizaje matemático)*, Narcea, S.A. de ediciones, Madrid, 2008.

[8] M. Lundyová, *Posvátná geometrie*, Dokořan, Praha, 2013.

[9] M. Polo, *Libro de las cosas maravillosas*, Editor José J. de Olañeta, Palma de Mallorca, 2002.

[10] Scot Olsen, *Záhadný zllatý řez*, Dokořan, Praha, 2013.

[11] Š. Voráčová a kolektiv, *Atlas Geometrie. Geometrie krásná a užitečná*, Academia, Praha, 2012.

[12] V. Sedláček, *El reloj astronómico en Praga*, Agencia ProVás, s.r.o, Praga, 2006.

[13] VVAA (Ludwig Mies van der Rohe's Comission in Brno), *Villa Tugendhat*, Brno City Museum, Brno, 2011.

En internet

[14] J. Cabero, `http://tecnologiaedu.us.es/images/stories/jca51.pdf`

[15] J. Mora, `http://jmora7.com/Mosaicos/index.html`

[16] A. Pérez Sanz, `http://platea.pntic.mec.es/aperez4/masmenos.htm`

[17] M. Sada, `http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm`

[18] Páxina web da OCDE, `http://www.oecd.org`

[19] Páxina web do proxecto DeSeCo, `http://www.deseco.admin.ch`

[20] Páxina web da UNESCO, `http://www.unesco.org`

Outros recursos secundarios son citados nas unidades didácticas elaboradas para cada actividade concreta do proxecto.

Imaxe 1: Brno

Imaxe 2: Brno


Imaxe 3: Brno


Imaxe 4: Brno


Imaxe 5: Galicia


Imaxe 6: Galicia

Imaxe 7: Galicia

Imaxe 8: Galicia

Mª DEL CARMEN BUITRÓN PÉREZ
CPI Viaño Pequeno- Trazo
<buitron@edu.xunta.es>

OLGA MARTÍNEZ CANCELAS
Klasické a španělské Gymnázium Bystrc - Brno
<olgamaca@yahoo.es>

SECCIONS

Mal estudante e fumador metido ao chou nun cadaleito

XOSÉ ENRIQUE PUJALES MARTÍNEZ

Imos analizar a continuación dúas noticias de prensa. As dúas son de 2013, Ano Internacional da Estatística, e por iso están relacionadas con ela; e as dúas teñen outra cousa en común, a súa capacidade de potenciación da actitude crítica. Pero ademais, a segunda serve para relacionar un tráxico feito real cun problema histórico das Matemáticas, grazas ao cal comprenderemos que o resultado obtido no suceso é intuitivamente sorprendente pero matematicamente previsíbel. Comecemos.

Nesta sección imos usar as Matemáticas como instrumento para analizar criticamente noticias da prensa e comprender a realidade.

PRENSAndo as Matemáticas

A relación entre as variábeis fumar e notas académicas

En xullo de 2013, a **Universidade Carlos III de Madrid** enviou unha nota de prensa ás axencias informativas comunicando os resultados dun estudo realizado entre 9127 estudantes de 4º da ESO da Comunidade de Madrid no que se chegaba á conclusión de que “los alumnos brillantes fuman menos”.

Nesa nota de prensa dise que “los investigadores han descubierto una estrecha relación entre el rendimiento escolar y el hábito de fumar: cuanto menor es el primero, mayor es el segundo”, é dicir, existe unha correlación inversa forte.

O estudo, á vista da nota de prensa, parece serio (mostra representativa, tamaño,...) e as conclusións probablemente sexan correctas. O problema é a formación científica dalgúns periodistas: a noticia apareceu en moitos medios, a maioría dos cales fixeron un extracto dela sen engadir nada da súa colleita. Pero cando quixeron ser “creativos” apareceron os erros: transformaron a relación entre as dúas variábeis nunha dependencia entre elas. Así, apareceron titulares como o seguinte (**Practica español**):

ou mesmo textos como o de **El Correo**:

Este erro é vello e xa foi tratado para este mesmo asunto (notas/fumar) por Darrell Huff [2] no oitavo capítulo do seu excelente e recomendábel libro, escrito en 1954. Nese capítulo denuncia a tendencia a confundir correlación con causalidade ou, expresado coas súas propias palabras “el sofisma que dice: si B sigue a A, A es la causa de B”. Por desgraza, o rendemento escolar non depende do hábito de fumar, porque se fose así, *todo* o profesorado de *todas* as materias deberíamos insistir unha e outra vez nun só tema co noso alumnado: deixade de fumar.

Este erro é frecuente nos medios de comunicación, e a súa detección é un exercicio de potenciación da necesaria capacidade crítica. Ademais, a discusión destes erros axuda á reflexión (por exemplo, por que hai unha correlación directa entre o número de profesores de Matemáticas nas vilas e o número de enfermos mentais nelas?) e á formulación de hipóteses e busca dun novo factor que explique a relación entre dúas variábeis (por exemplo, ¿que factor pode explicar a seguinte relación entre estudantes: a maior tamaño das mans, maior comprensión matemática?). Con isto aprenderemos a descubrir e desenmascarar falacias na vida cotiá.

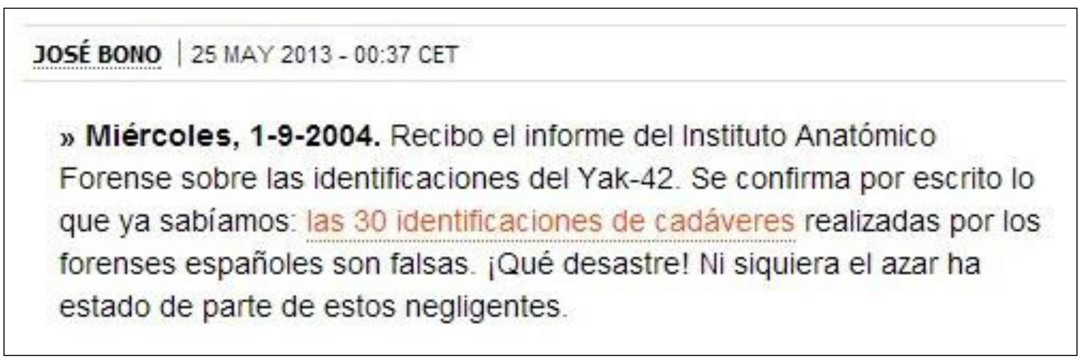
O Yak-42 e o problema dos sombreiros

En maio de 2003, estando como ministro de Defensa Federico Trillo, un avión Yakovlev 42 estrelouse en Turquía. Morreron os 13 tripulantes e os 62 militares españois que regresaban dunha misión en Afganistán.

Deses 62 militares, os forenses turcos foron capaces de identificar a 32, pero non puideron facelo cos outros 30. Desprazados ao lugar do sinistro, os militares forenses españois resolveron o caso inmediatamente, como lles pedían os seus superiores.

Un ano despois, o novo ministro de Defensa español, José Bono, comprometeuse a investigar o asunto das identificacións. En setembro de 2004, José Bono recibiu o informe do Instituto Anatómico forense, no que se afirmaba que as 30 identificacións dubidosas eran falsas, fallaran o 100 %.

En maio de 2013, conmemorando o décimo aniversario da traxedia, José Bono facilitou ao xornal **EL PAÍS** o contido do seu diario. Nel aparece a seguinte anotación:


JOSÉ BONO | 25 MAY 2013 - 00:37 CET

» **Miércoles, 1-9-2004.** Recibo el informe del Instituto Anatómico Forense sobre las identificaciones del Yak-42. Se confirma por escrito lo que ya sabíamos: las 30 identificaciones de cadáveres realizadas por los forenses españoles son falsas. ¡Qué desastre! Ni siquiera el azar ha estado de parte de estos negligentes.

Eu non son quen de xulgar como neglixentes aos militares forenses que se deron présa por identificar uns corpos sen as mínimas garantías, pero o ex-ministro saberá. Mais o que nos interesa, desde o punto de vista matemático, é analizar a frase "... Ni siquiera el azar ha estado de parte de... "

Polo xeito de escribilo, parece que José Bono esperaba que, por azar, o resultado fose menos malo. E, posiblemente, os forenses implicados confiasen en, ademais de satisfacer aos seus superiores, contar cuns cantos acertos. Pero,... é isto razoábel? Vexamos, axudados das matemáticas, que non.

O estudo do número de acertos esperados cando introducimos uns corpos ao chou nuns cadaleitos é un problema clásico das Matemáticas, estudado por Euler e coñecido como o problema dos sombreiros e que pode ser introducido e resolto polos nosos alumnos nos casos máis reducidos (quen lle ía dicir a José Bono que un comentario del podía ser útil para resolver un problema histórico das matemáticas, relacionado nada máis e nada menos que con Euler!). Dito problema consiste en, supoñendo que n persoas levan a un acto o seu sombreiro e despois de finalizado e recollidos os chapeus ao chou, calcular a probabilidade de que 0, 1, 2,... n persoas se retiren co sombreiro correcto. Esta situación admite varios enunciados: por exemplo Ricardo Cao e outros [1] propoñen o exercicio con sobres e cartas. No caso que nos ocupa temos cadaleitos e corpos.

No libro ao que nos acabamos de referir, os autores propoñen achar a probabilidade de que no interior de catro sobres introduzamos a carta correcta. Este caso (n acertos de n obxectos) e o anterior ($n-1$ acertos de n obxectos) son os casos máis sinxelos. Sucede que $P(X=n)=1/n!$ e $P(X=n-1)=0$. O máis complicado é resolver os outros casos, e para iso, cando n é pequeno , o xeito máis doado é escribir todos os casos posíbeis ($n!$) e achar os acertos. Por problemas de espazo, inclúo máis abaixo a táboa 1 coa solución cando $n=3$ (as permutacións son seis).

	Cadaleito A	Cadaleito B	Cadaleito C	Nº Acertos
Corpos	a	b	c	3
	a	c	b	1
	b	a	c	1
	b	c	a	0
	c	a	b	0
	c	b	a	1

Frecuencias de acertos	
Frecuencia de 0 =	2
Frecuencia de 1 =	3
Frecuencia de 2 =	0
Frecuencia de 3 =	1
TOTAL =	6

Probabilidades	
P(X=0) =2/6=	33,33%
P(X=1) =3/6=	50%
P(X=2) =0/6=	0%
P(X=3) =1/6=	16,67%

Táboa 1: Táboa para $n = 3$

Cando $n \geqslant 6$, o número de permutacións posíbeis é suficientemente grande como para desaconsellalo para o alumnado. Merche Sánchez (2012) facilítanos o xeito de chegar á fórmula xeral, que aplicaremos para achar as probabilidades para os casos $r \neq n$ e $r \neq n-1$ (porque, como xa dixemos antes, nestes casos $P(X = n) = 1/n!$ e $P(X = n-1) = 0$):

$$P(X = r) = \frac{1}{r!} \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!} \right)$$

Con esta fórmula podemos construír a a táboa para n casos.

n	P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)	P(X=5)
1	0	1				
2	0,5	0	0,5			
3	0,3333	0,5	0	0,1667		
4	0,375	0,3333	0,25	0	0,0417	
5	0,3667	0,375	0,1667	0,0833	0	0,0083
...						
30	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031
...						
∞	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031

Táboa 2: Táboa para n casos

E podemos ver que cando $n = 30$ a probabilidade de que non atinemos ningún é $P(X = 0) = 36,79\,\%$ e de acertar exactamente 1 tamén é $P(X = 1) = 36,79\,\%$, o que significa que a probabilidade de que, ao introducir ao chou 30 corpos en 30 cadaleitos, atinar máis de un é só o 26,42 % e acertar máis de catro é un ridículo 0,37 %. Por isto, no caso do Yak-42, no que os militares forenses non identificaron correctamente ningún cadáver, o resultado entra dentro do previsíbel ou, expresándoo nos termos empregados por José Bono, o azar actuou sen favoritismos cara a eses neglixentes.

Referencias

Bibliográficas

[1] R. Cao, A. Labora, S. Naya, M. Ríos, *Métodos estatísticos e numéricos*, Baía Edicións, A Coruña, 2001.

[2] D. Huff, *Cómo mentir con estadísticas*, Crítica, Barcelona, 2011.

En internet

[3] El Correo: http://www.elcorreo.com/vizcaya/20130702/mas-actualidad/sociedad/malos-estudiantes-fuman-201307011711.html

[4] El País: http://elpais.com/tag/yak_42/a/

[5] El País: http://elpais.com/diario/2004/09/02/espana/1094076009_850215.html

[6] Practica español: http://www.practicaespanol.com/es/fumar-afecta-al-rendimiento-escolar-buenos-estudiantes-espanoles-fuman-menos/art/7120/

[7] M. Sánchez, *Aprendiendo de Euler*, 2012, http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionCantabria2012/Madrid-Euler.pdf

[8] Universidade Carlos III de Madrid: http://www.uc3m.es/portal/page/portal/actualidad_cientifica/noticias/tabaco_alumnos

Este artigo foi recibido no ano 2013, *Ano Internacional da Estatística.*

XOSÉ ENRIQUE PUJALES MARTÍNEZ
Catedrático de Instituto xubilado
<enriquepuj@edu.xunta.es>

Unha ollada incompleta

MANUEL VILARIÑO FREIRE

Blogosfera matemática

Comezamos neste número de Gamma unha nova sección dedicada aos blogues de contido matemático e educación matemática que inzan a internet. Pretendemos difundir os traballos realizados polo profesorado, investigadores/as ou divulgadores/as en xeral, nun rexistro informal como este que os fai especialmente accesibles para seren levados á aula.
Cando falamos de recursos educativos na nosa materia, tradicionalmente falamos de boletíns de exercicios e problemas onde aplicar os procedementos que explicamos en clase. "É o programa que temos que dar", dicimos con frecuencia. Porén, sabemos que a educación matemática non é só iso, e que debemos procurar o estímulo do alumnado ollando na actualidade, na contorna e nos medios de comunicación que lle son máis próximos. Alén disto, temos a obriga de potenciar a súa competencia dixital e de auto-aprendizaxe amosándolles a rede como unha fonte de recursos onde poder reforzar e contextualizar o traballado nas aulas, mesmo no uso das redes sociais. Quen o debe facer se non?
Os nosos rapaces e rapazas xa son nativos dixitais. Teñen perfil nas redes sociais e están máis actualizados no seu uso que a maioría do profesorado. Contan con máis "amigos" e máis "seguidores" e os seus móbiles son máis modernos que os nosos. No entanto, comprobamos con frecuencia que se presentan dificultades no momento de procurar nun buscador, peneirar a información ou relacionar os contidos dixitais cos seus apuntamentos.

A *blogosfera* é unha fonte enorme de recursos que nos pode axudar a paliar as eivas coas que nos atopamos, día a día, e cada vez máis, na nosa materia. Disque os blogues están a vivir a súa segunda idade de ouro (grazas sobre todo ás redes sociais), e os de mates non quedan atrás. Nesta primeira xeira da sección comezaremos facendo un pequeno e incompleto percorrido polos blogues máis populares de matemáticas, todos eles moi recomendables. Gozade da viaxe!

Comezamos por, talvez, o mellor e máis popular, **Gaussianos**[5], o primeiro que seguín. Leva achegando artigos dende 2006, e ten máis de cinco mil seguidores no Facebook. Realiza divulgación de conceptos de todo tipo, mais tamén segue a actualidade matemática, algo que sempre foi esquecido nas nosas aulas. É un exemplo de como se pode facer divulgación para un grande público. Porque si que existe ese público detrás de todos os tópicos da nosa materia. E a mellor mostra son os premios *Bitácoras*, que no seu apartado de *Educación*, leva dous anos seguidos premiando a blogues matemáticos. O ano 2012 foi **Mati y sus Mateaventuras**[6], onde se explican conceptos de diferente complexidade dunha maneira moi orixinal e accesible. De feito, estas entradas son a orixe do libro *Hasta el Infinito y más Allá* [1] de recente publicación. No ano 2013 o premiado foi **TocaMates**[7], que nos presenta unhas matemáticas distintas, con adiviñas, problemas e xogos diversos e, como o seu nome indica, con propostas de carácter manipulativo.

Mais, se temos que falar de recoñecementos a entradas matemáticas, temos que falar do evento *Carnaval Matemático*, a iniciativa do magnífico blogue de **Tito Eliatron**[8], que premia cada mes ao mellor artigo que voluntariamente queira participar (máis de 50 ao mes). Entre os máis premiados figura **Experientia Docet**[9], onde se divulga cultura científica en xeral, **Cifras y Teclas**[10], con catro premios no último ano e entre os máis prolíficos o fotoblogue **Fotomat**[11] que recompila centos de imaxes de contido matemático agrupadas por categorías.

No eido institucional destacamos tres blogues: **Matemáticas y sus Fronteras**[12] do ICMAT e **ZTF-News**[13] da Facultade de Ciencias da Universidade do País Vasco, os primeiros dunha maior formalidade mais de grande calidade nos dous casos e, como non, o blogue da institución **Antonio Pérez**[14], que leva décadas facendo divulgación das matemáticas nos diferentes medios.

En calquera caso, hai moito onde elixir. Os seguintes blogues poden ser unha boa proposta para alimentar o noso lector de *Feeds*: **Eulerianos**[15], **Grado-361**[16] da *Cadena Ser*, **Espejo Lúdico**[17] , **Que no te aburran las mates**[18], **Café Matemático**[19], **Covacha Matemática**[20], **Guirnalda Matemática**[21], **Juegos Topológicos**[22], **Los Matemáticos no son gente seria**[23], **Simplemente Números**[24], **El zombi de Shrödinger**[25], ...

En canto a blogues puramente educativos, temos un feixe de propostas onde se recolle o inmenso traballo do profesorado, comprometido no seu labor docente, que comparten neste espazo a súa actividade para que poida ser aproveitada por outros compañeiros/as. Mostra disto é a iniciativa **Mates Compartidas**[26], onde se compilan recursos de todo tipo para levar á aula. Neste ámbito, un dos máis veteranos é **Viaje a Ítaca con Manoli**[27] con máis de 230 mil visitas. Mais se tiveramos que quedar con un que amose a creatividade e a innovación en matemáticas, sobre todo da súa cara manipulativa, o escollido é **i-matematicas**[28]. En Galicia xa non temos os Obradoiros presentes hai uns anos. Este blogue é a mellor maneira de reivindicalos. E un máis onde se propón outra idea de ensinar matemáticas **Mas Ideas Menos Cuentas**[29].

O uso das TICs e a súa aplicación ás matemáticas é recorrente en moitos blogues. Mostra disto é a iniciativa colaborativa **En la Nube TIC**[30], con máis de 50 docentes de todo o Estado achegando recursos. Na mesma liña o **Proyecto Guappis**[31] recompila de maneira colaborativa unha grande variedade de recursos e ideas para aplicar as *apps* dos dispositivos móbiles a contidos de carácter educativo en todas as etapas académicas. Tamén temos varias posibilidades especializadas para as aplicacións que máis usamos como *Moodle* o *Geogebra*. E compañeiras de Agapema, que nos deixan **En Clase de MATEmaTICas**[32], que xunta unha selección moi completa de utilidades que poden facilitar e mellorar o noso traballo diario, ou como **Compás y Regla**[33], que nos mostra a construción das principias figuras e propiedades da Xeometría Plana.

En Galicia temos moitos e moi activos blogues en lingua galega xurdidos nos centros educativos. Parece que os traballos das Bibliotecas e dos Equipos de Normalización son os que máis abundan (e os que máis se prestan); tamén, dalgunhas áreas como a de Educación Infantil, porén en secundaria e concretamente en matemáticas os que hai, non están demasiado publicitados. Pensamos que dende os centros, debemos facer tamén divulgación e promover que o alumnado tamén a faga, e os blogues son, hoxe en día, a canle máis acaída. Así pois, o desenvolvemento de blogues segue a ser unha tendencia educativa, recomendada como *Boa Práctica* por todas as institucións. De feito, os premios *Espiral Edublogs*, os máis relevantes do noso ámbito, comezaron en 2007 con 168 participantes. No ano 2012 atinxiron os 1800 distribuídos en varias categorías e países. A miña experiencia con **Ciencia no Camiño**[34] no IES de Palas de Rei, onde durante o curso 2012-13 publicamos máis de cen entradas, case todas asinadas polo alumnado do primeiro ciclo da ESO, non pode ser máis positiva.

CartaXeométrica[35] e **Retallos de Matemáticas**[36], **Dous Ferrados**[37], **Dúbidas de Mates**[38] e **Matemáticas na Rúa**[39] son un extraordinario referente para comezar a nosa carreira blogueira. Este medio permite a interacción entre diferentes centros educativos co que a difusión dos traballos e motivación están garantidas. Esperemos que no próximo número da nosa revista poidamos centrarnos nas experiencias máis cercanas, para seguir mellorando, seguir aprendendo e nos seguir divertindo.

Mais non podemos rematar esta sección sen nomear a dous clásicos referentes galegos no que atinxe a partillar traballos matemáticos do alumnado. O **Mathesis**[40] do IES Otero Pedrayo e o **Tetractis**[41] do IES de Monelos.

Listaxe de blogues

[5]**Gaussianos:** http://gaussianos.com
[6]**Mati e demáis achegas de Clara Grima:** http://claragrima.com
[7]**TocaMates:** http://tocamates.com
[8]**Tito Eliatron:** http://eliatron.blogspot.com
[9]**Experientia Docet:** http://edocet.naukas.com
[10]**Cifras y Teclas:** http://cifrasyteclas.com
[11]**Fotomat:** http://fotomat.es
[12]**Blogue ICMAT:** http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/
[13]**Fac. Ciencias UPV:** http://ztfnews.wordpress.com/
[14]**Antonio Pérez:** http://aperez4.blogspot.com
[15]**Eulerianos:** http://eulerianos.blogspot.com
[16]**Grado-361:** http://blogs.cadenaser.com/grado-361/
[17]**Espejo Lúdico:** http://espejo-ludico.blogspot.com
[18]**Que no te aburran las Mates:** http://matesnoaburridas.wordpress.com/
[19]**Café Matemático:** http://cafematematico.com
[20]**Covacha Matemática:** http://covacha-matematica.blogspot.com/
[21]**Guirnalda Matemática:** http://apolonio.es
[22]**Juegos Topológicos:** http://topologia.wordpress.com
[23]**Los matemáticos no son gente seria:** http://juanmtg1.blogspot.com/
[24]**Simplemente Números:** http://simplementenumeros.blogspot.com
[25]**El Zombi de Schrödinger:** http://cuantozombi.com/
[26]**Mates Compartidas:** http://matematicascompartidas.wordpress.com/
[27]**Viaje a Ítaca con Manoli:** http://viajeaitacaconmanoli.blogspot.com
[28]**i-Matemáticas:** http://i-matematicas.com
[29]**Más Ideas Menos Cuentas:** http://masideas-menoscuentas.com/
[30]**En la Nube TIC:** http://enlanubetic.blogspot.com/
[31]**Proyecto Guappis:** http://proyectoguappis.blogspot.com/
[32]**En Clase de MATEmaTICas:** http://espegesteira.blogspot.com
[33]**Compás y Regla:** http://compasyregla.blogspot.com.es/

[34] **Ciencia no Camiño:** http://ciencianocaminho.blogspot.com
[35] **Carta Xeométrica:** http://cartaxeometrica.blogspot.com
[36] **Retallos de Matemáticas:** http://retallosdematematicas.blogspot.com/
[37] **Dous Ferrados:** http://dousferrados.blogspot.com/
[38] **Dúbidas de Mates:** http://dubidasdemates.blogspot.com.es/
[39] **Matemáticas na Rúa:** http://matematicasnarua.blogspot.com/
[40] **Mathesis:** http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/node/277
[41] **Tetractis:** http://tetractismonelos.blogspot.com.es/

Referencias bibliográficas

[1] C. Grima, R. García, *Hasta el Infinito y más allá*, Editorial Espasa, 2013.

MANUEL VILARIÑO FREIRE
IES Perdouro - Burela
<mvilarinho@edu.xunta.es>
@vilagz

As matemáticas dos Simpsons

GASPAR M. ANTELO BERNÁRDEZ

Nesta nova sección sobre as Matemáticas no audiovisual pretendemos mostrar o alcance desta materia máis alá do formal e adentrármonos nun universo diferente no que poidamos apreciar cómo se poden utilizar as matemáticas en ámbitos diversos como o cine, a televisión, a radio, a fotografía,...

Matemáticas na 7ª arte

Nesta primeira toma de contacto centrarémonos nunha serie de televisión tan coñecida como *Os Simpsons*, na que de cando en vez podemos atopar diferentes aspectos da nosa materia, de xeito moitas veces superficial, outras non tanto, que dotan á mesma dun engado especial para os que gozamos ao encontrar relacións coa matemática nos lugares máis insospeitados.

Querería que este repaso inicial que daremos ao longo das primeiras temporadas da serie puidese servir, igual que a min, a todos os profesores que se animen, para poder utilizar estas ideas directamente na aula de matemáticas co alumnado.

Ao longo de varios anos fun recompilando os capítulos nos que a min me parece que se pode encontrar un contido interesante para a súa utilización de maneira didáctica.

A metodoloxía didáctica empregada comeza pola organización dos capítulos, seleccionando os cortes nos que podemos encontrar contido interesante, agrupándoos en diferentes categorías (fraccións, porcentaxes, xeometría, problemas, medidas, derivadas, proporcionalidade, interese na materia, etc) para unha posterior asignación a un curso determinado, no meu caso desde primero da ESO en diante, de xeito que se adapten aos contidos tratados na materia nese momento, que resulten lúdicos e que non se repitan ao longo dos cursos.

Cando os programemos na aula debemos ter en conta varias consideracións, o momento para poñelo, a súa duración, a pertinencia, a súa secuenciación ao longo do curso, etc. Cada un debe coñecer a súa clase e elixir o momento idóneo para introducir un elemento como este na aula, ben pode ser para introducir un tema, como momento de relax cando comezamos a notar a inevitable e natural desconexión en certos momentos por parte do alumnado, ou para finalizar un tema concreto. Iso si, debemos procurar que nos sirva como pretexto para unha actividade relacionada e non simplemente como unha mera distracción. Evidentemente son moi poucos os episodios que poderemos poñer de forma íntegra, sendo, na maioría dos casos, cortes dos mesmos os que empregaremos nas nosas clases. Así a todo, non debemos cinguirnos estritamente á parte matemática, senón que, esta, debemos procurar que estea dentro dunha secuencia completa para que o alumno poida entender a acción cinematográfica que alí discorre e sentirse dentro da acción, a ser posible deixando terminar o *gag* ou a parte graciosa que habitualmente aparece. Desa maneira aumentaremos o interese do alumno e a súa predisposición ante unha posterior tarefa relacionada co visto.

Sen outras consideracións pasarei a percorrer os diferentes capítulos que persoalmente utilicei, indicando brevemente o que sucede no mesmo desde un plano matemático e o momento no que isto ocorre, propoñendo unha parte da materia para a que podería servir. O curso concreto no que utilizalo depende moito de cada un xa que a distribución da materia non sempre é a mesma.

Cada capítulo estará indicado cun nome do tipo:

OS—02x08—*O club dos Patteos mortos*—corte2

Nel aparece OS como abreviatura da serie, seguidamente dous números que indican temporada e capítulo, así como o seu título. Engádese unha pequena descrición do que ocorre e o instante aproximado no que comeza a escena.

1.- OS—01x02—*Bart, o xenio*—corte1

04:30 Bart le un problema de matemáticas sobre trens.
Tema: Problema.

2.- OS—01x02—*Bart, o xenio*—corte2

12:55 Os rapaces xenios enganan a Bart con xogos sobre pesos e medidas.
Tema: Medidas.

3.- OS—01x02—*Bart, o xenio*—corte3

15:58 A profesora fala sobre derivadas.
Tema: Derivadas.

4.- OS—02x01—*Bart en suspenso*

13:25 Martin fai uns breves comentarios sobre probabilidades e proporcionalidade.
Tema: Proporcionalidade.

5.- OS—02x08—*O club dos patteos mortos*—corte1

07:30 Lisa di que ten que preparar o concurso de matemáticas.
Tema: Interese na materia.

6.- OS—02x08—*O club dos patteos mortos—corte2*

13:25 Lisa fala sobre o golf e a xeometría, e Bart dille que ten utilidade práctica.
Tema: Xeometría.

7.- OS—02x16—*O Suspenso do can de Bart*

6:02 Comentario do doutor sobre a materia que lle gusta a Lisa, as matemáticas. Aparecen as palabras: polígono, hipotenusa e algoritmo de Euclides.
Tema: Interese na materia.

8.- OS—02x18—*Pinta con grandeza*

9:45 O profesor Lombardo dá unha clase de pintura explicando que os obxectos se poden ver como formas xeométricas.
Tema: Xeometría.

9.- OS—02x21—*Tres homes e un cómic*

15:50 Bart, Milhouse e Martin repártense un cómic mediante un xogo que ten que ver con números. Vale para probabilidade.
Tema: Probabilidade.

10.- OS—02x22—*Sanguenta inimizade*

13:40 Lisa móstralle a Maggie un Dodecaedro.
Tema: Xeometría.

11.- OS—03x11—*Burns vende a central*

3:00 O corredor de bolsa dille a Homer que as súas accións subiron 25 cts e que, se vende, recibirá 25 dólares, pero en realidade son 5200 dólares, subiron de 1/8 a 52 e 1/4.
Tema: Fraccións.

12.- OS—03x17—*Homer, bateador*

10:40 Un hipnotizador dille ao equipo que se van entregar ao 110 % e eles contestan que por definición é imposible.
Tema: Porcentaxes.

13.- OS—03x19—*Morte de cans*

1:20 Nos primeiros minutos fanse referencias á lotaría, o premio e a base 6.
Tema: Probabilidade.

14.- OS—03x23—*O amigo de Bart namórase*—corte1

8:50 Kent Brockmam di que 34 millóns de americanos adultos son obesos e o seu exceso de graxa podería encher os 2/5 do canón do colorado.
Tema: Fraccións.

15.- OS—03x23—*O amigo de Bart namórase*—corte1a

09:34 Vese unha lápida con idade e peso en medidas inglesas.
Tema: Medidas.

16.- OS—03x23—*O amigo de Bart namórase*—corte2

14:05 Bart, en casa de Martin, ve un edredón con contas matemáticas.
Tema: Interese na materia.

17.- OS—03x24—*Irmán, préstasme dúas moedas*—corte1

1:35 Homer nun exame médico dá o 104 % de graxa corporal porque está comendo durante o exame.
Tema: Porcentaxes.

18.- OS—03x24—*Irmán, préstasme dúas moedas*—corte2

15:25 O irmán de Homer inventa un tradutor de bebés. Vese un osciloscopio e fálase da amplitude de onda.
Tema: Funcións.

19.- OS—04x01—*Kampamento Krusty*

4:35 Aparece Bart dándolle á profesora un libro de mate sen utilizar. Vese a importancia que lle dan a aprobar Lisa e Bart.
Tema: Interese na materia.

20.- OS—04x21—*Marge encadeada*

Marge in chains (versión orixinal de Marge encadeada)

13:00 Apu nos tribunais di que pode lembrar 40.000 decimais do número Pi. O último díxito é 1 (na versión dobrada cámbiase por 40.000 receitas de pasteis, todos número 1).
Tema: Xeometría.

21.- OS—05x10—*Springfield ou como aprendin a amar o xogo legalizado*

2:15 Enuncia o teorema de Pitágoras, pero mal.
Tema: Xeometría.

22.- OS—05x11—*Homer o vixilante*

11:50 Kent Brockman entrevista a Homer e fálalle sobre porcentaxes de delincuencia.
Tema: Porcentaxes.

23.- OS—05x13—*Homer e Apu*

15:20 Apu, Lisa e Homer falan de ir á oficina central que está na India que está a 10.000 millas, máis de 16.000 Km.
Tema: Medidas.

24.- OS—05x15—*Homer no espazo exterior*

3:00 Uns reporteiros falan dun lanzamento espacial no que os tripulantes son matemáticos.
Tema: Interese na materia.

25.- OS—06x18—*Naceu unha estrela*—corte1

3:18 Marge fala sobre adoptar o sistema métrico decimal.
Tema: Medidas.

26.- OS—06x18—*Naceu unha estrela*—corte2

17:45 Homer di que a súa mente vai a 1Km/min.
Tema: Medidas.

27.- OS—06x18—*Naceu unha estrela*—corte2a

18:20 No cerebro de Homer aparecen dous monos e un encerado con $E = mc^2$ e $dy/dx = x^3$.
Tema: Ecuacións e fórmulas.

28.- OS—06x24—*O limoeiro de Troia*—corte1

6:28 Na clase escríbense números romanos.
Tema: Enteiros.

29.- OS—06x24—*O limoeiro de Troia*—corte2

12:15 Cantos son 2 e 2? 5.
Tema: Enteiros.

30.- OS—06x24—*O limoeiro de Troia*—corte3

15:20 Nunha habitación as portas están con números romanos e só se sae polo 7.
Tema: Enteiros.

31.- OS—07x06—*Especial Halloween VI-3D*

16:00 $P = NP$; $e^{\pi i} = -1$; diversos obxectos en 3D (esferas, cubos, conos, cilindros,...); números en hexadecimal; algúns primos; eixes de coordenadas; planos; $1 + 1 = 2$; $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$; $P_{m_0} > 3H_0^2/8\pi G$.
Tema: Ecuacións e fórmulas.

32.- OS—07x08—*Nai Simpson*

6:45 Bart dille á súa avoa que como non estivo nos seus acontecementos vitais antes, a 75$ por festa, total 22.000$.
Tema: Enteiros.

33.- OS—07x15—*Bart, o soprón*—corte1

2:40 Conta corrente ao 2,30 % de interese anual.
Tema: Porcentaxes.

34.- OS—07x15—*Bart, o soprón*—corte1a

6:50 A Krusty quítanlle o 75 % dos seus ingresos durante 40 años para pagar unha débeda fiscal.
Tema: Porcentaxes.

35.- OS—07x23—*Moito Apu e poucas noces*

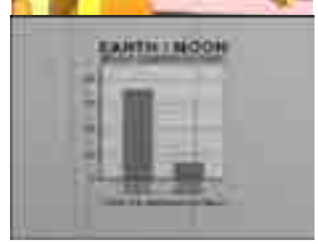
04:35 A Homer chégalle unha carta co seu soldo e os impostos.
Tema: Porcentaxes.

36.- OS—08x11—*O retorcido mundo de Marge Simpson*

4:20 Disco Stu fala da subida nun 400 % da venda de discos e da tendencia.
Tema: Porcentaxes.

37.- OS—08x21—*O vello e Lisa*

19:05 Burns ofrécelle a Lisa o 10 % de 120 millóns.
Tema: Porcentaxes.



38.- OS—08x25—*A guerra secreta de Lisa*

2:00 Nun documental explícase que na Lúa só se pesa unha porcentaxe do que se pesa na Terra.
Tema: Porcentaxes.

Como se pode apreciar, a cantidade de cortes que se poden aproveitar para o seu emprego na aula é bastante significativa. Espero ter podido contribuír, na medida das miñas posibilidades, a que se poida ver que sempre podemos buscar novas metodoloxías e novos enfoques, neste caso empregando unha serie de televisión, para intentar lograr iso que tan difícil resulta ás veces como é conseguir a atención e o interese do noso alumnado. Confío, nunha próxima ocasión, en poder completar este artigo engadindo moitas máis temporadas ás analizadas no presente artigo.

Espero que esta nova sección poida ser do agrado de todos os lectores.

Referencias en internet

[1] Dr. S. J. Greenwald, Dr. A. Nestler, *Simpsonsmath*, http://simpsonsmath.com

Nota legal: The Simpsons® e The Simpsons© son propiedade de Twentieth Century Fox. Este artigo é exclusivamente para uso educativo. As imaxes destas páxinas foron sacadas de episodios de The Simpsons que son propiedade de Twentieth Century Fox. O autor do artigo non se beneficia económicamente das imaxes.

GASPAR M. ANTELO BERNÁRDEZ
CPR Sagrado Corazón de Placeres - Pontevedra
<ticgaspar@yahoo.es>

Dúas pinceladas de GeoGebra cos polinomios na ESO

FERNANDO ZACARÍAS MACEIRAS

Esta sección que se abre con este número, pretende achegar ás persoas lectoras as enormes posibilidades que GeoGebra, esta ferramenta informática extraordinaria, aporta á ensinanza das Matemáticas e outras ciencias, á pura investigación de propiedades, regularidades ou resultados diversos, e, ao desenvolvemento da competencia matemática. Aínda máis, aspira a contribuír a que o uso de GeoGebra se converta nun habitual da práctica docente diaria, e mesmo, a que o seu uso sexa incluído como contido curricular.

As dúas pinceladas ás que fai referencia o título, están relacionadas coa ensinanza e coñecemento dos polinomios na ESO. Unha, referida ao valor numérico tratado en segundo curso e outra, á descomposición factorial e simplificación de fraccións alxébricas en cuarto curso.

Como apéndice, inclúese un recordatorio sobre unha coñecida construción realizada con GeoGebra, tratada reiteradamente en cursos de formación e congresos: a transformación de funcións. Esta construción resulta de moita utilidade en cuarto para a explicación das funcións elementais, especialmente a de proporcionalidade inversa e a radical.

É importante sinalar que tanto o alumnado de segundo coma o de cuarto xa están iniciados no uso de GeoGebra e son capaces de seguir instrucións de construción sinxelas e de nivel medio.

GeoGebra

1. Valor numérico dun polinomio no 2º curso da ESO

Nos libros de texto adoitamos ler:

"Cando nun polinomio as letras toman valores concretos, tamén o polinomio toma un valor concreto.

Por exemplo, dado o polinomio $2x^3 - 6x^2 + 3x - 2$:

- *Para $x = 2$* $\quad\rightarrow\quad 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 16 - 24 + 6 - 2 = -4$
  O valor numérico para $x = 2$ é -4.
- *Para $x = 0$* $\quad\rightarrow\quad 2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$
  O valor numérico para $x = 0$ é -2.
- *Para $x = -1$* $\quad\rightarrow\quad 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = -2 - 6 - 3 - 2 = -13$
  O valor numérico para $x = -1$ é -13.

Observa que o valor numérico dun polinomio depende do valor que tomen as letras."

Pero estes polinomios, expresións de letras e números, á parte de ser moi útiles, teñen algunha outra forma de coñecerse? Hai maneiras de velos nalgún sitio? Teñen significado xeométrico? E o valor numérico, a que vén? Para que serve? De que nos informa?,...

Todas estas preguntas teñen respostas sorprendentes. Comecemos por repasar as coordenadas cartesianas e entender o que son e significan as coordenadas dos puntos.

Exercicio 1 (GeoGebra)

Cos eixes e a cuadrícula visibles,

a) Debuxa os puntos do plano $A = (1, 3)$, $B = (2, 0)$, $C = (-5, 1)$, $D = (6, -2)$, $E = (0, -3)$ e $F = (-4, -4)$. Fai que se vexan as súas coordenadas e indica nun cadro de texto o cuadrante no que está cada un. Algún problema?

b) Fixa os puntos anteriores para que non se movan accidentalmente.

c) Crea dous puntos ***G*** e ***H*** no segundo cuadrante; ***K*** e ***L***, no terceiro; ***J***, no primeiro e ***M***, no cuarto. Fai que se vexan os seus rótulos e dálles cores diferentes aos do apartado a), de xeito que os de cada cuadrante teñan unha cor diferente.

d) Crea dous puntos ***P*** e ***Q*** no EixeX e outros dous, ***R*** e ***S***, no EixeY.

e) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_coordenadas_01.ggb***.

Exercicio 2 (GeoGebra opcional)

Cos eixes e a cuadrícula visibles,

a) Debuxa un punto ***A*** no primeiro cuadrante. Ver rótulo con valor. Cor vermella.

b) Traza as perpendiculares aos eixes por ***A***.

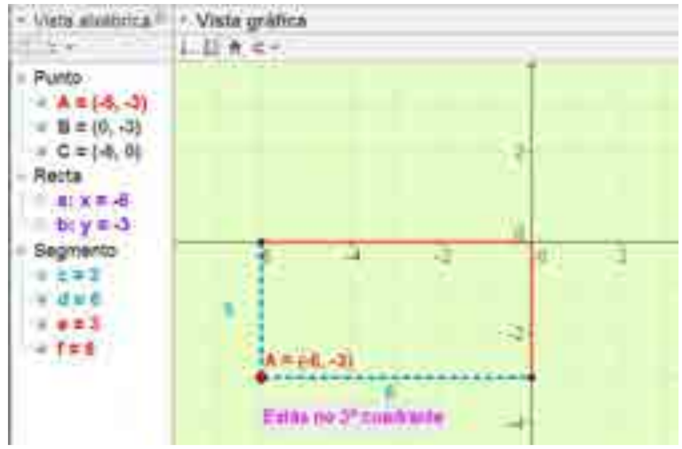
c) Obtén os puntos de intersección ***B*** e ***C***, das perpendiculares cos respectivos eixes. Sen rótulo.

d) Crea os segmentos ***AB*** e ***AC***. Trazado descontinuo. Rótulo co valor. Color.

e) Debuxa o punto $D = (0, 0)$. Fíxao.

f) Crea os segmentos ***DB*** e ***DC***. Sen rótulos. Mesma cor que ***A***. Trazo continuo. Oculta ***D***.

g) Insire os nove textos seguintes (os que están en dúas liñas, fainos así):



i) Estás no 1º cuadrante
ii) Estás no 2º cuadrante
iii) Estás no 3º cuadrante
iv) Estás no 4º cuadrante
v) Estás na parte positiva do EixeX (1º e 4º cuadrantes)
vi) Estás na parte negativa do EixeX (2º e 3º cuadrantes)
vii) Estás na parte positiva do EixeY (1º e 2º cuadrantes)
viii) Estás na parte negativa do EixeY (3º e 4º cuadrantes)
ix) Este é o único punto que está en todos os cuadrantes.

h) Nas propiedades de todos os textos, en posición, elixe ***A***.

i) En Avanzado, na Condición para amosar o obxecto escribe o que se indica a continuación (pulsando *Intro* despois de cada unha):

i) Texto1: $(x(A) > 0) \wedge (y(A) > 0)$
ii) Texto2: $(x(A) < 0) \wedge (y(A) > 0)$
iii) Texto3: $(x(A) < 0) \wedge (y(A) < 0)$
iv) Texto4: $(x(A) > 0) \wedge (y(A) < 0)$
v) Texto5: $(x(A) > 0) \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$
vi) Texto6: $(x(A) < 0) \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$
vii) Texto7: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge (y(A) > 0)$
viii) Texto8: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge (y(A) < 0)$
ix) Texto9: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$

j) Coloca os textos da mellor forma posible para facilitar a visibilidade dos obxectos e rótulos, e dálles as cores que che pareza.

k) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_coordenadas_02.ggb***.

Agora, nun arquivo novo, crearemos unha lista de puntos e ...

Exercicio 3 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (-3, 0)$, $B = (-2, 4)$, $C = (0, -6)$ e $D = (1, -8)$. Se é preciso deforma a escala dalgún eixe para que se vexan todos na *Vista gráfica*. Rótulo con Nome e valor.

b) Selecciona os catro puntos (por exemplo, creando co rato un espazo rectangular que os conteña).

c) Utiliza a ferramenta *Crea lista* para crear a formada polos catro puntos. Chamarase **lista1**.

d) Escribe na *Barra de Entrada* **Polinomio[lista1]** e pulsa *Intro*.

e) Hai dúas sorpresas. Unha é que na Vista alxébrica créase unha desas expresións que chamamos polinomio e que ten por nome ***f***. A outra é que na Vista gráfica aparece un debuxo que pasa polos catro puntos da lista.

f) Se cambiamos o nome do polinomio por ***P*** e na Vista gráfica facemos que se vexa o nome e o valor, teremos outra sorpresa: GeoGebra indica que o debuxo que obtivemos é o do polinomio. Así que parece que os polinomios se poden debuxar.

g) Estudemos o debuxo e a expresión do polinomio con máis detalle:

   i) Coa expresión do polinomio calcula os seus valores numéricos cando x vale -3, -2, 0 e 1, respectivamente, e compara os resultados coas coordenadas dos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***. Que se observa? (podes comprobar os teus cálculos escribindo directamente na *Barra de Entrada* $P(-3)$, $P(-2)$, $P(0)$ e $P(1)$, pulsando *Intro* despois de cada un).

   ii) Escribe a conclusión nun cadro de texto.

   iii) Sitúa un punto ***E*** na gráfica de ***P(x)*** e fai que se vexa o seu valor. Move ***E*** pola gráfica e elixe un punto que teña as coordenadas enteiras ou con expresión decimal exacta, se é posible. Podes prognosticar o que valerá o valor numérico do polinomio cando se substitúa o x pola primeira coordenada do punto?

   iv) Escribe nun cadro de texto o que deduzas.

h) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_1.ggb***.

Despois do visto, trata de resolver os exercicios seguintes:

Exercicio 4 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (-2, 0)$, $B = (-1, 4)$, $C = (0, 2)$ e $D = (2, 4)$. Crea a lista **lista1** $= \{A, B, C, D\}$.

b) Obtén un polinomio ***P(x)*** que pase polos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***.

c) Indica os valores numéricos do polinomio ***P(x)*** para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$.

d) Canto valen os valores numéricos $P(-3)$ e $P(3/2)$?

e) Obtén e sinala todos os valores de x para os que o valor numérico vale cero.

f) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_2.ggb***.

Exercicio 5 (GeoGebra opcional)

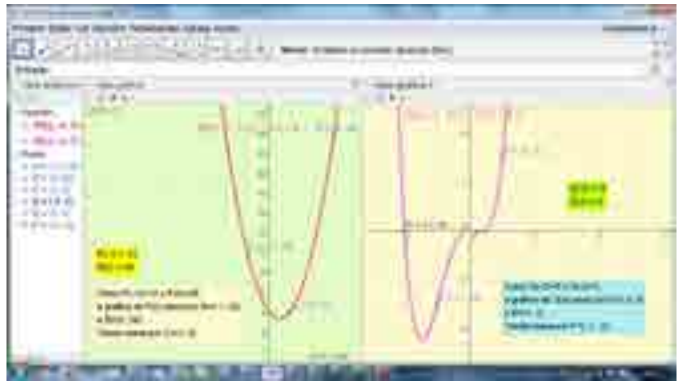
a) Calcula o valor numérico do polinomio para $x = -1$ e $x = 3$:

$P(x) = 3x^2 - 3x + 6$.

b) Calcula $Q(-2)$ e $Q(1)$ para o polinomio $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2$.

c) Indica tres puntos do plano polos que pasa a gráfica de cada un destes polinomios.

d) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_3.ggb***.



A continuación inclúense dous exercicios propostos na correspondente proba do tema con algúns exemplos das respostas dadas polo alumnado:

Exercicio 6 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (1, 2)$, $B = (-1, 9)$, $C = (-2, 8)$ e $D = (3, 3)$. Crea a lista **lista1** $= \{A, B, C, D\}$.

b) Obtén un polinomio ***P(x)*** que pase polos puntos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***. Fai que se vexa o nome e valor dos puntos e do polinomio.

c) Indica os valores numéricos do polinomio $P(x)$ para $x = 1$, $x = -2$ e $x = 3$.

d) Canto valen os valores numéricos $P(0)$ e $P(-1/2)$?

e) Obtén e sinala todos os valores de x para os que o valor numérico vale cero.

f) Garda o arquivo e súbeo á aula virtual como tarefa.

(Respostas: de 2,5; de 4; de 7; de 8,5).

Exercicio 7 (GeoGebra opcional)

a) Calcula o valor numérico do polinomio para $x = 2$ e $x = -1$: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

b) Calcula $Q(-1)$ e $Q(2)$ para o polinomio $Q(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4$.

c) Para o polinomio $P(x)$, indica dous puntos do plano polos que pasa a súa gráfica de modo que un deles estea no EixeY. Para o polinomio $Q(x)$, indica dous puntos do plano polos que pasa a súa gráfica de modo que un deles estea no EixeY e o outro no EixeX.

d) Garda o arquivo e súbeo á aula virtual como tarefa.

(Respostas: de 9; de 3,5).

Exercicio 8

Á vista de todo o anterior, responde, segundo a túa opinión, á pregunta seguinte, explicando o máis amplamente posible o que sinales:

"Un polinomio é unha fórmula que se pode representar cun debuxo ou é un debuxo que se pode expresar mediante unha fórmula?"

2. Descomposición factorial e simplificación de fraccións alxébricas no 4º curso da ESO

O tratamento dos polinomios en cuarto, de cotián, non leva asociado o seu enfoque como funcións ata que nos temas específicos de funcións elementais se traballa a función lineal e a cuadrática. Encontrámonos con explicacións claras e rigorosas para matemáticos, pero de lenta asimilación para o alumnado:

O valor numérico dun polinomio, $P(x)$, para $x = a$, é o número que se obtén ao substituír o x por a, e efectuar as operacións indicadas. A ese número chámaselle $P(a)$.

Por exemplo, se $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$, para $x = 3$, obtemos:

$$P(3) = 7 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 94 \cdot 3 + 7 = -5.$$

Este valor, $P(3) = -5$, coincide co resto de dividir $P(x)$ entre $x - 3$. E isto non é casual, senón xeral.

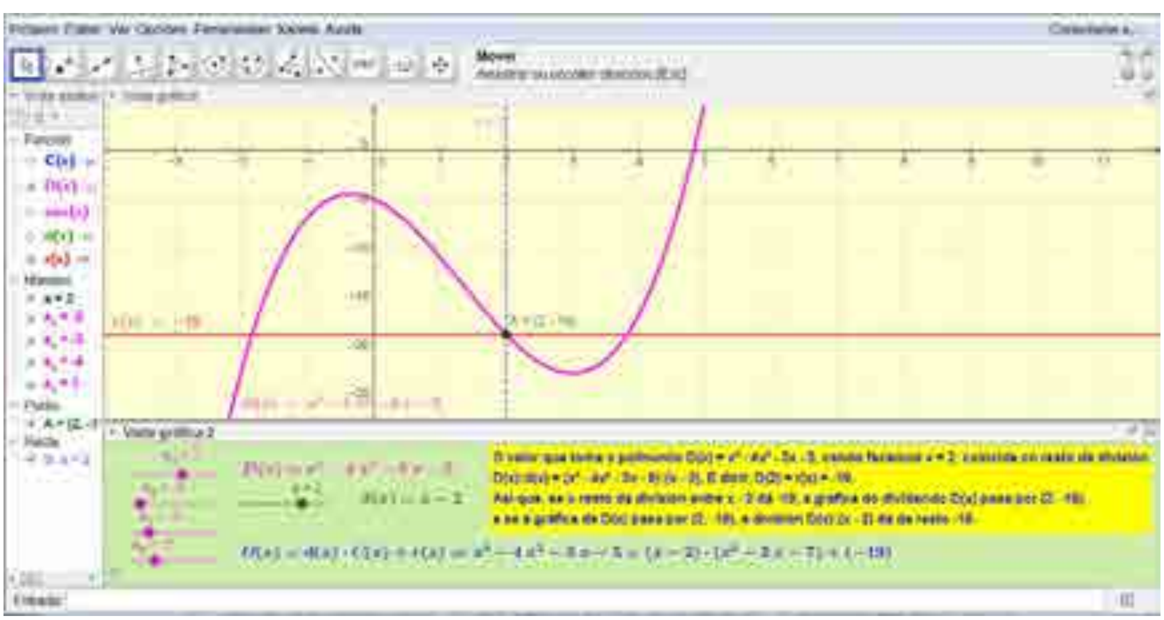
Teorema do resto: O valor que toma un polinomio, $P(x)$, cando facemos $x = a$, coincide co resto da división $P(x) : (x - a)$. É dicir, $P(a) = r$.

Máis claramente:

- *Se en $P(x)$ substituímos x por a e facemos as operacións, obtemos un número ao que chamamos $P(a)$ (valor do polinomio para $x = a$).*
- *Se dividimos $P(x)$ entre $x - a$, o resto é un número r.*

Pois ben, o teorema asegúranos que $P(a) = r$.

Unha proposta alternativa ou complementaria a esta, tense no arquivo ***teorema_resto_02.ggb***.



Os enfoques desta proposta alternativa ou complementaria, que pode pasar pola construción directa, total ou parcial do alumnado, ou pola manipulación da figura xa realizada, ou, incluso, só pola utilización expositiva do profesorado, descansan sobre algunhas ou todas as consideracións seguintes:

- GeoGebra pode utilizarse na clase como comprobación de calquera extremo.
- Potenciar o uso sistemático da representación gráfica asociada aos procesos alxébricos para os que sexa posible.
- Adaptarse á utilización de ferramentas de cálculo simbólico que permiten comprobar resultados obtidos, orienta sobre como afrontar problemas mediante a experimentación repetida, e potencia a asociación dos conceptos teóricos e prácticos de forma continuada.
- Non preocupa o uso ou abuso que, das posibilidades de GeoGebra (ggb en diante), poida facer o alumnado. Cando é capaz de utilizar o proceso ggb necesario para obter o resultado desexado, na maioría dos casos, sabe o que busca ou o aprende ao atopalo.
- Apenas se producen casos nos que algunha persoa tenta aprender os procesos ggb para resolver as cuestións analíticas ou conceptuais que se lle formulan. É moito menos frecuente que os intentos de copiar. En calquera caso, o beneficio obtido, por quen o faga, será moi superior ao suposto prexuízo teórico que puidese ocasionarlle, xa que está manexando ferramentas matemáticas que trata de artellar adecuadamente para obter as conclusións buscadas; experimenta por acerto e erro e, por medio desa experiencia, está conseguindo resultados que o obrigan a deducir e decidir sobre o que vai obtendo e sobre o que está buscando.
- En resumo, que se facilita outra forma de aprender que poida que marque ou non o futuro, pero que, de calquera xeito, establece unha nova dimensión na aprendizaxe das matemáticas.

A modo de ilustrar de xeito moi concreto o tratamento que se lle deu aos polinomios en cuarto curso, partirase dunha das probas (exames), que se lle puxo a un dos grupos: ***s4ab_02_p_b.pdf***.

Nesta proba aparecen nove exercicios, nos que, en tres, se traballan especificamente contidos con GeoGebra. Nos outros, o alumnado pode usar o programa libremente se quere ou se pode, aínda que as respostas teñen que axustarse ao pedido nos enunciados (cando se sinala, analiticamente, ou, paso a paso, ...).

O primeiro exercicio específico ggb indica:

Ejercicio 4.-

a.. *Crea un polinomio de tercer grado que tenga sólo dos raíces enteras. Escribe en un cuadro de texto de GeoGebra la forma de obtenerlo, haz que se vea su gráfica, su expresión extendida y los puntos de corte con el EjeX* (s4b_iniciais_proba_4a.ggb).

b.. *Crea un polinomio de cuarto grado con dos raíces reales no enteras y las otras dos no reales. Escribe en un cuadro de texto de GeoGebra la forma de obtenerlo, haz que se vea su gráfica, su expresión extendida y los puntos de corte con el EjeX* (s4b_iniciais_proba_4b.ggb).

A resposta ao apartado a.., está relativamente aberta. O alumnado pode deducir que a terceira raíz é unha fracción ou un irracional (xa que na clase viu que as non reais ían a pares), aínda que quizais entenda que hai tres raíces enteiras (de xeito que unha está repetida). Admitíronse as dúas respostas como válidas.

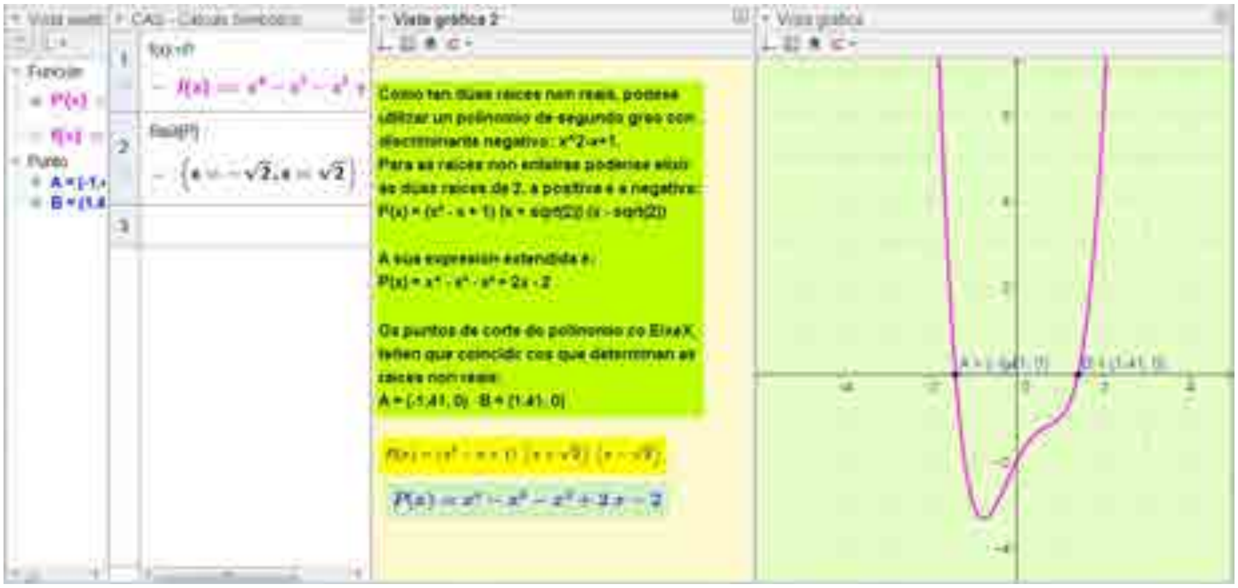
Un exemplo con raíz dobre pode ser ***s4b_iniciais_proba_4a_dobre.ggb***, e un cunha raíz fraccionaria pode ser ***s4b_iniciais_proba_4a_fraccion.ggb***.

Inclúese o vídeo da construción do primeiro caso.

(Exemplos do contestado polo alumnado: de 8, de 4).

A resposta ao apartado b.. busca aproveitar o aprendido respecto a que cando o discriminante dunha ecuación de segundo grao é negativo, a ecuación non ten solucións reais.

A construción ggb que hai que realizar pode partir da feita no apartado anterior, con leves modificacións, como se ve no arquivo ***s4b_iniciais_proba_4b.ggb*** e no vídeo correspondente.



O segundo exercicio específico da proba é o seguinte:

Ejercicio 5.-

a.. *Obtén el MCD y el MCM de los polinomios (sin realizar las operaciones):*
$P(x) = 2x(x-1)^3(x+2)$ e $Q(x) = 3x^2(x-1)^2$

b.. *Escribe, con ayuda de GeoGebra, la expresión extendida del MCM y MCD anteriores* (*s4ab_iniciais_proba_5b.ggb*).

c.. *Obtén dos polinomios $R(x)$ y $T(x)$ (de grado cuatro) de manera que $R(3) = 0$, $T(1) = 0$ y de modo que su MCD sea: $MCD(R(x), T(x)) = (2x+1)^2(3x-5)$*

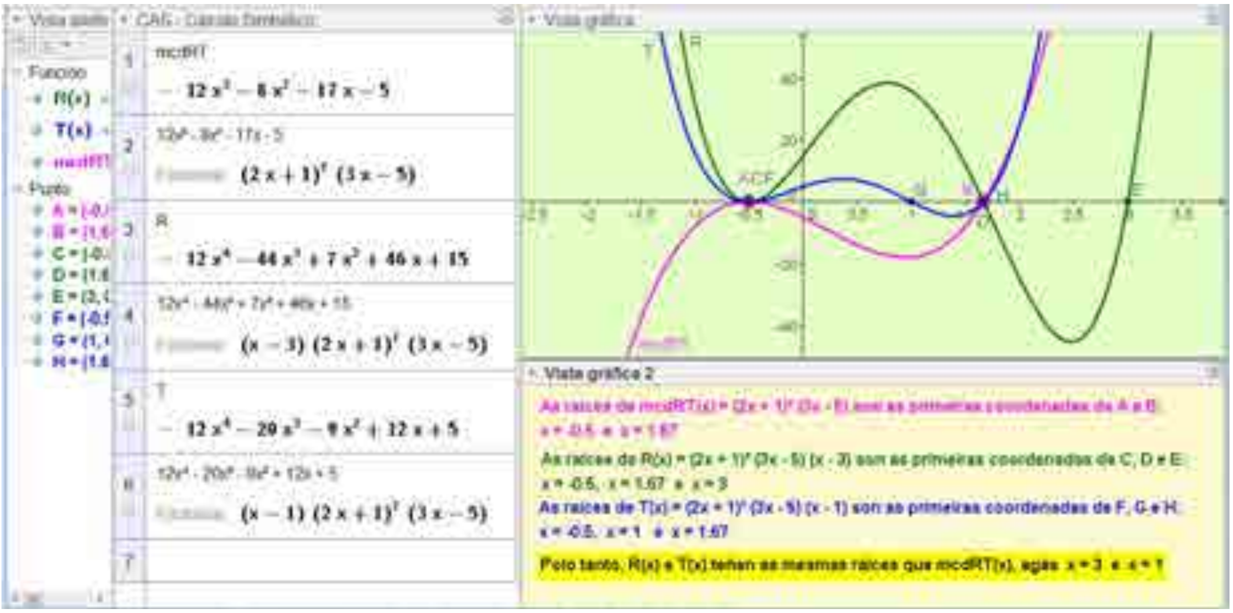
d.. *Comprueba con GeoGebra que R y T tienen las mismas raíces que su MCD, excepto en $x = 3$ y $x = 1$, dibujando sus gráficas y señalando los puntos de corte con el EjeX.* (*s4ab_iniciais_proba_5d.ggb*)

No apartado a.., só se pretende a utilización dos conceptos correspondentes.

No b.., GeoGebra dá a resposta do apartado a.., pero, preténdese que se use como comprobante aínda que non se ve como problemático o seu propio uso para resolver, polo indicado anteriormente respecto á riqueza de conceptos e procesos que aporta a manipulación do programa. En calquera caso o que se obtén no ggb ***s4ab_iniciais_proba_5b.ggb***, é moito máis que o que se pide no exercicio (vídeo).

Os obxectivos dos apartados c.. e d.. resultan claros e son ambiciosos: As raíces do MCD son as comúns aos dous polinomios, as primeiras coordenadas dos puntos de valor numérico cero definen raíces, as raíces determinan cortes co EixeX, calquera raíz "a" determina un factor "$x - a$", os puntos de corte das gráficas teñen significado alxébrico, as gráficas van asociadas cos valores numéricos, ...

No arquivo ***s4ab_iniciais_proba_5d.ggb***, pódese ver un estudo bastante amplo do sinalado. Só unha parte del, a relativa especificamente ao referido no enunciado, é a que se lle pide ao alumnado.



(Exemplos do contestado polo alumnado: de 8, de 5, de 3, de 2).

O terceiro exercicio específico da proba ten o seguinte enunciado:

Ejercicio 7.-

a.. *Simplifica (analíticamente e indicando paso a paso) la siguiente fracción algebraica:*

$$\frac{2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(2x+3)^2(2x-2)}$$

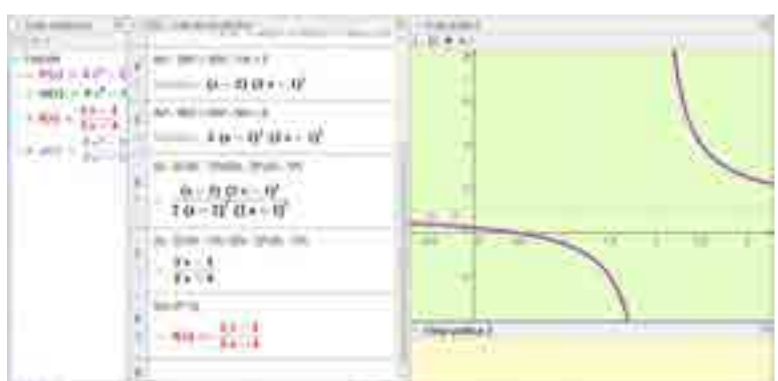
b.. *Simplifica utilizando GeoGebra, escribiendo previamente la descomposición de numerador y denominador* (*s4ab_iniciais_proba_7b.ggb*):

$$\frac{8x^4 - 28x^3 + 30x^2 - 13x + 2}{(8x^4 - 40x^3 + 66x^2 - 40x + 8}$$

Os obxectivos do apartado a.., están moi definidos: simplificación mediante descomposición factorial usando as ferramentas típicas: factor común, Ruffini, ecuación de segundo grao, produtos notables, se é o caso, ... Non obstante, isto non impide que o realizado sexa comprobado mediante algún proceso ggb, ou que, antes de obter o resultado, se investigue con GeoGebra cal terá que ser a resposta.

No vídeo do apartado b.., pódese apreciar o interesante fío do proceso que leva á conclusión. Dado o caso, tamén se podería comprobar a diferenza entre as gráficas da fracción alxébrica inicial e da simplificada.

O arquivo rematado é este.



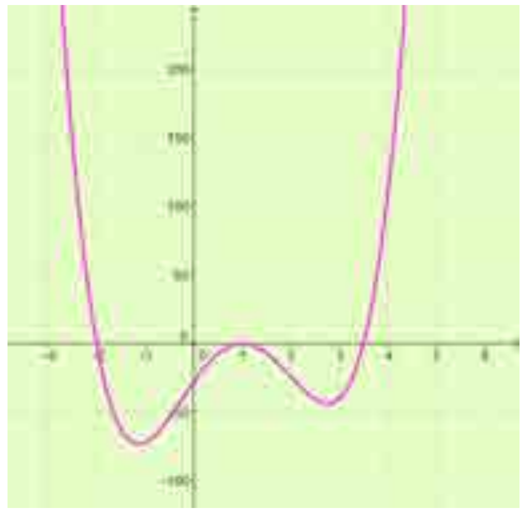
É notable sinalar que se está a utilizar pouco o carácter dinámico de GeoGebra. Quizais neste tema de 4º ESO, o simbolismo alxébrico está a un nivel o suficientemente alto para que o alumnado poida aproveitar máis matices. Non obstante, en varios dos exercicios propostos poden crearse esvaradores (*deslizadores*) para coeficientes ou raíces de polinomios, caixas de entrada para os propios polinomios que aparecen, ...

Para rematar esta segunda pincelada sobre polinomios no 4º curso da ESO, esbozamos outro exercicio da proba, que non pide resolución con GeoGebra, pero que, como moitos outros, a súa resolución ggb non desmerece da exclusivamente escrita, mais ao revés, ofrece matices enriquecedores e mesmo inesperados:

Ejercicio 9.-

b.. *A la vista del gráfico siguiente indica la descomposición factorial de $P(x)$ y sus raíces, sabiendo que tiene grado 4 , que uno de sus factores es $2x - 7$, y que su coeficiente principal es 4:*

c.. *¿Cuánto valen los valores numéricos de $P(x)$ en $x = -1$ y $x = 0$, $P(-1)$ y $P(0)$?*



No vídeo vanse realizando tentativas (lóxicas ou non en función dos coñecementos adquiridos), ata dar coa solución. Comézase cun traballo de adaptación de escalas coa utilización da segunda vista gráfica. Para o apartado c.., o enunciado non especifica método, así que se pode elixir o ggb, malia a obvia contestación de $P(1)$ (remate do vídeo).

2.1. Apéndice. Transformación de funcións

Neste apéndice, crearase un polinomio de cuarto grao algo especial (con coeficiente principal suficientemente pequeno) partindo das súas raíces, e que permita apreciar visualmente os efectos das diversas transformacións ás que se verá sometido. Unha vez apreciado o efecto, a función poderase cambiar por calquera outra para o estudo de diferentes casos e posibilidades.

2.1.1. Construír unha función de 4º grao, que poderemos modificar empregando esvaradores.

a. Colocaremos as diferentes vistas dun xeito similar ao que se ve na figura (ao final). Como opcións de partida tomamos Redondeo a tres decimais e Rotulaxe en só novos puntos.

b. Deixamos os eixes e a cuadrícula visible na Vista gráfica principal e quitámolos da segunda. Activamos a Vista gráfica 2 premendo sobre ela.

c. Barra de Entrada: introducimos os valores **0.006**, **-4**, **-1**, **3** e **9**, pulsando intro entre cada un deles.

d. Premer sobre cada un dos "puntos baleiros" que están ao lado de cada un dos valores que apareceron na Vista alxébrica. Dese modo amósanse os esvaradores na Vista gráfica 2 (porque é a que está activa).

e. Prememos co botón dereito sobre os obxectos da Vista alxébrica ou sobre os esvaradores, e eliximos Propiedades. Na pestana "Esvarador" deixámolos todos co Ancho en 100 px., e modificamos os valores iniciais de cada un deles:

a: min = -1, max = 1, incremento = 0.001.
b, c, d, e: min = -10, max = 10, incremento = 0.1.

f. Barra de Entrada: introducir a función:***f(x)=a(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)***. Facendo clic co botón dereito sobre a función accedemos ao cadro de diálogo de Propiedades de Obxecto onde se modifica a súa cor e grosor.

g. Crear un punto no eixe de abscisas e visualizar a súa imaxe:

   i. Coa ferramenta *Novo punto* debuxar un punto ***A*** sobre o eixe de abscisas premendo sobre dito eixe. Ocultar o rótulo de ***A***.

   ii. Escribir na Barra de entrada o texto ***"x = "+x(A)***. Nas propiedades deste texto, en Posición, elixir *A* e, en Cor, darlle unha de fondo suave.

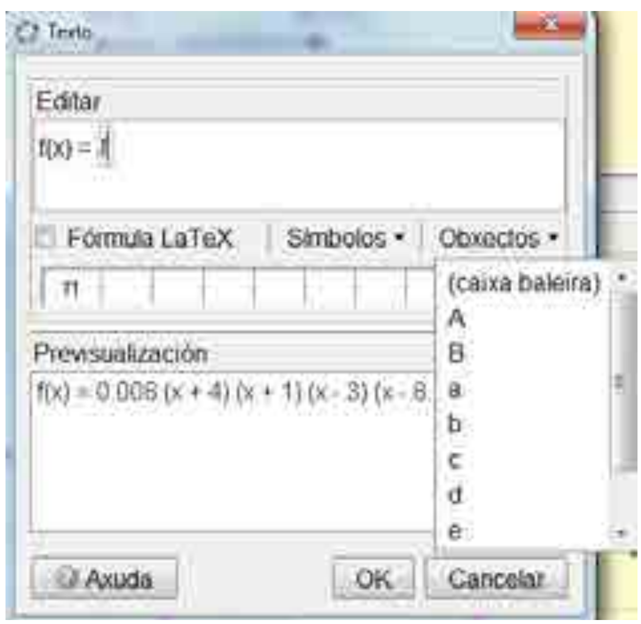
   iii. Barra de entrada: Escribir ***(x(A),f(x(A)))***. Dese xeito aparece o punto ***B*** sobre a gráfica, coa mesma abscisa que o punto ***A***. Amosar só o rótulo do valor do punto ***B***.

   iv. Barra de entrada: Escribir ***C=(0,y(B))***. Ocultar o rótulo de ***C***.

   v. Coa ferramenta *Segmento*, debuxar os segmentos ***AB*** e ***CB***, con eses nomes e, nas súas propiedades, elixir na pestana de estilo, estilo de recta, puntos e ocultar os rótulos.

h. Crear un texto ilustrativo do concepto de función ligado á gráfica construída na Vista gráfica 2:

   i. Coa ferramenta *Inserir texto*, escribir: ***f(x) =*** $\boxed{f}$. A ***f*** dentro da caixa. Conséguese facendo clic esquerdo sobre ela na Vista alxébrica ou na gráfica. Tamén, elixíndoa no depregable de Obxectos ou collendo no mesmo despregable a (*caixa valeira*) e escribindo *f* no seu interior.



   ii. Pódese activar Fórmula LateX ou non. Nos polinomios a diferenza é só estética, pero coas fraccións alxébricas, por exemplo, cambia o formato de saída.

iii. Seguindo algún dos procedementos descritos, escribir os seguintes textos:

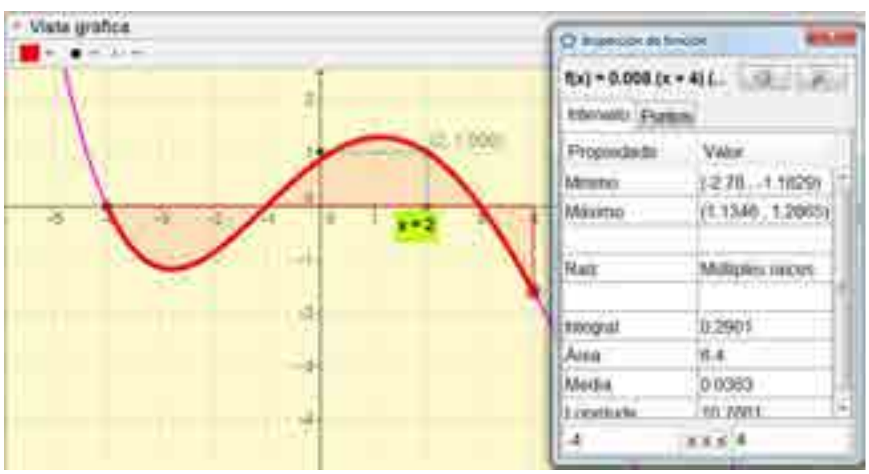
iv. Adornar os textos se se desexa.

v. Darlles a todos eles, Posición absoluta de pantalla.

2.1.2. Análise de elementos característicos dunha función

a. Seleccionar a ferramenta *Inspección de Función* e facer clic sobre a función ***f(x)***. Na pestana Intervalo, observar os máximos e mínimos e os puntos de corte da función no dominio que aparece seleccionado.

b. Modificar os extremos do intervalo, mover os esvaradores do coeficiente principal e das raíces de $f(x)$ e observar os cambios.



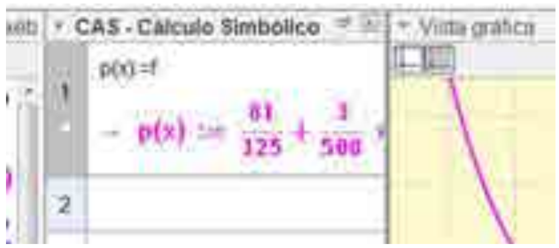
c. Seleccionar a pestana Puntos, cambiar o paso e engadir máis puntos facendo clic no botón Expón táboa de puntos (premer no botón inferior esquerdo da nova xanela).

d. Modificar as coordenadas dos puntos cambiando o número directamente na cela.

e. Cambiar o número de cifras decimais no redondeo facendo clic no botón Opcións que aparece na parte superior dereita da ferramenta *Inspección de Función*.

f. Finalmente, pechamos a ferramenta.

g. Para obter unha expresión estendida da función nun texto, activamos a Vista CAS no menú Ver. Escribimos ***f*** e pulsamos a ferramenta *Avalia (cálculo exacto)*, a do signo igual. Aparece unha expresión calculada. Premendo sobre o circuliño que hai baixo o "1" da Vista CAS, aparece outra función, quizais de nome p, idéntica a f, pero con formato estendido. Ocultámola.



h. Creamos na Vista gráfica 2 o texto LaTeX, $\boldsymbol{f(x)} = \boxed{\boldsymbol{p}}$. Adornámolo e dámoslle Posición absoluta de pantalla.

Co visto ata este momento poderíanse ensinar contidos da ESO como: dominio, imaxe, corte cos eixos, signo dunha función, crecemento e decrecemento, máximos e mínimos...

2.1.3. Crear a transformada da función orixinal con catro parámetros

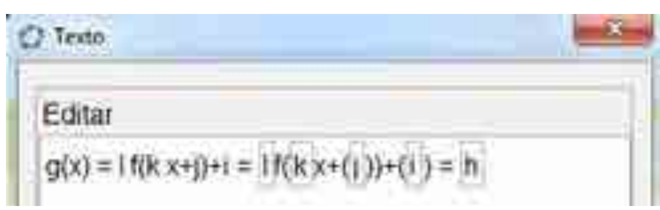
a. Crear outros catro esvaradores na Vista gráfica 2, escribindo na liña de Entrada, sucesivamente: ***i=0, j=0, k=1, l=1***.

b. Facendo clic sobre o circuliño que aparece á esquerda destas catro últimas igualdades, amósase un esvarador para cada unha destas variables. Modificar as súas propiedades para que se vexan parecidos aos outros pero de diferente cor.

c. Barra de Entrada coa Vista gráfica principal activa: Escribir ***g(x)=l f(k x+j)+i*** (os espazos en branco entre letras son produtos).

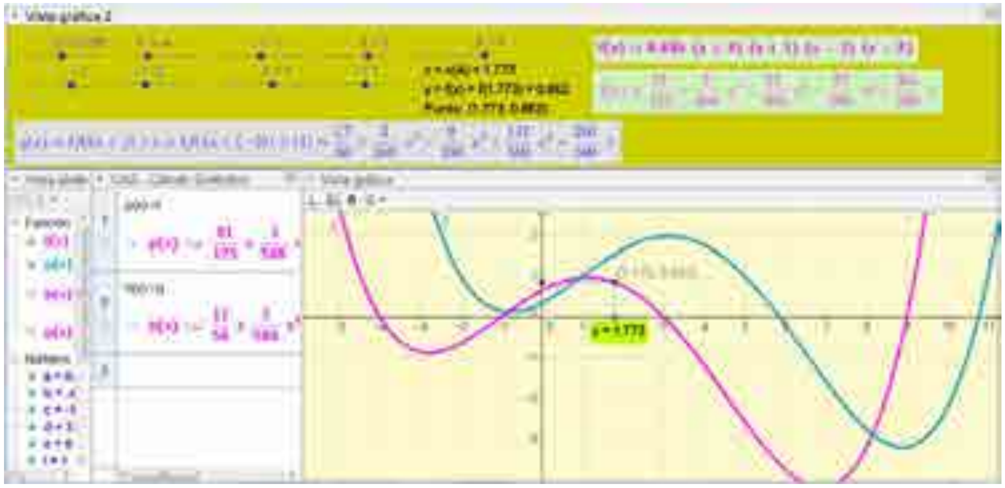
d. Na Vista CAS, escribir na segunda liña ***g*** e pulsar de novo *Avalia*. Ocultar a función que se crea (quizais ***h***, depende da orde dos pasos e modificacións feitas na construción).

e. Coa ferramenta *Inserir texto*, escribir na segunda vista gráfica:

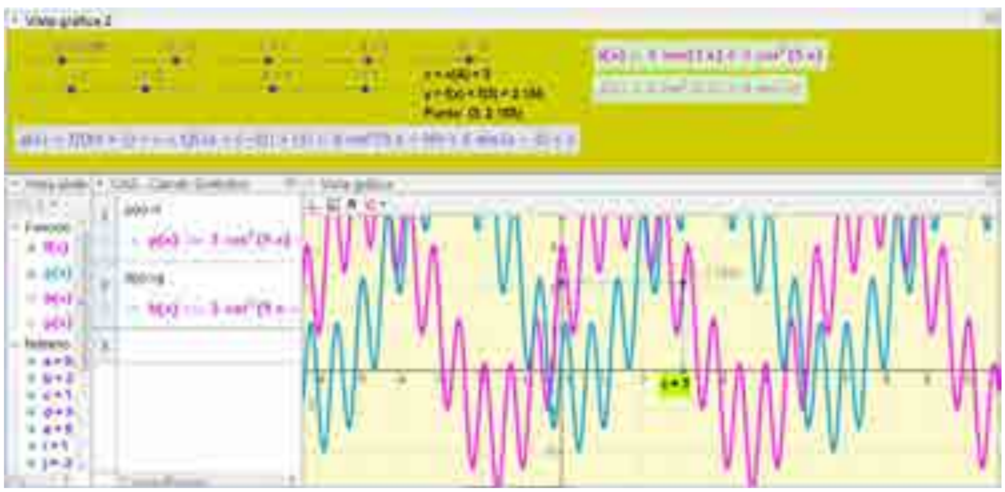


f. Nas propiedades do texto modificar cor e tamaño para que sexa ben visible. Posición absoluta de pantalla.

g. Mover os esvaradores ***i, j, k, l***, para comprobar os resultados obtidos, ...



h. Se se desexa traballar con outras funcións máis vistosas, os resultados son inmediatamente adaptables. Por exemplo:



i. Gardar o arquivo ***transformacion_funcions_01.ggb***.

Creado por Fernando Zacarías Maceiras (Grupo XeoDin), atópase baixo unha Licenza Creative Commons Recoñecemento-NonComercial 3.0 Unported

FERNANDO ZACARÍAS MACEIRAS
Grupo XeoDin
<fzacarias@edu.xunta.es>

Cómo facer un muíño de papel
(Papirohistoria para facer unha ra saltarina)

ROBERTO C. SANTOMÉ VARELA “COCO”

Os meus amigos chámanme ”Coco”.
Papiroflecta, aprendiz de mago, malabarista frustado, apaixonado da salsa (a música e o baile), ás veces contable e en xeral “friki”.
Levo desde 1995 facendo papiroflexia. Ao principio só na casa cos poucos libros que se podían conseguir en librarías “normais” e posteriormente, grazas a Internet, que utilicei non tanto para conseguir novos diagramas senón para tratar de coñecer máis xente da que poder aprender e coa que poder compartir a miña afección, conseguín contactar co grupo de papiroflexia de Santiago de Compostela a través da Asociación Española de Papiroflexia (**AEP**). Del@s aprendín (e aprendo) mil figuras e compartín algunhas das miñas mellores experiencias nas Convencións de papiroflexia ás que me dexei convencer (non me fixen moito de rogar) para ir. Ademais iniciáronme no mundo de impartir obradoiros a nenos.
A raíz disto, e logo de dar uns cantos obradoiros, decateime da imaxinación que lle poñen os nenos nos pasos intermedios ao realizar unha figura (mira!, parécese a un barco... , agora é unha cometa!) e como xa coñecía algunha papirohistoria que outra, tratei de crear unha para realizar esta ra saltarina de maneira divertida. Así facilitáballes aos nenos (e mamás e papás correspondentes) o recordar os pasos da figura e ademais tíñaos entretidos mentres a facían.

Casualidades do destino fixeron que a persoa que ía dar os obradoiros na *Feira matemática* non puidese e me chamase para pedirme se a podía substituír (grazas Alicia pola confianza) e despois de ter estado toda unha mañá na miña primeira experiencia na *Feira* e co mal sabor de boca de non poder seguir dándoos pola tarde, xa que foi sen dúbida un dos obradoiros mellor organizados (e levo dado uns cantos durante estes anos...) e ademais no que toda a xente que acudiu se portou incrible (con que tivesen desfrutado a metade ca min dando o taller doume por satisfeito...), xurdiu esta oportunidade de dar a coñecer por escrito o que tantas veces contei.

Antes de empezar gustaríame dar uns consellos (sobre todo se llelo ides ensinar a nenos):

- É importante insistir en que se realicen as dobreces sobre unha superficie dura,
  * porque é máis fácil realizar las dobras desta maneira e
  * porque así evitamos que lle dean a volta nas mans ao papel e poidan intuír que non é un muíño o que ao final de todo aparecerá. Aínda que non o pareza, esta é una das partes máis complicadas.
- Débese ser todo o preciso que se poida coas dobras que se fagan (aínda que tampouco fai falta obsesionarse, abonda con realizar as dobras cun mínimo de coidado). Unha vez marcados axuda o "repasalos" coas uñas. Desta maneira as futuras dobras máis complexas resultarán más fáciles.
- Serve practicamente calquera tipo de papel. Obtéñense bos resultados con folios normais (A4) de cores cortados á metade (así obtense un A5 (14,8×21 cm)). Se se saca o cadrado máximo do A5 (14,8×14,8) e se corta á metade (7,4×14,8 cm) dá para dúas ras que saltan bastante (estas pequenas saltan máis que as feitas por exemplo co cadrado máximo dun A4 (21×21 cm) cortado pola metade (10,5×21 cm) (Imaxe 1). Se conseguides papel cadrado, mellor, xa que só teredes que cortalo pola metade.

Imaxe 1

- Loxicamente, se se quere sorprender ao final, non podemos dicirlles aos nenos (e non tan nenos) que imos facer unha ra, polo que lles diremos que imos pregar un muíño de papel (como os de Don Quixote) e para facelo máis entretido farémolo contando unha historia mentres pregamos. Eu sempre pregunto antes de comezar: Con historia ou sen historia?... até o de agora ninguén me dixo "sen historia"...

Empecemos...

Esta é a historia de dous irmáns que vivían nunha vila na que chovía moito, (*pero moito, moito, moito... eu utilizo Santiago de Compostela, pero podedes usar a que máis vos conveña*) e a súa ilusión desde que eran moi pequenos era construír un muíño de vento (*como os de Don Quixote*).

Despois de traballar duro durante moito tempo conseguiron os cartos necesarios e compraron os materiais. Como eran dous, querían ter cadansúa planta (*rectángulo de proporción 2x1*) (Imaxe 2) e puxéronse mans á obra dobrando o rectángulo pola metade (Imaxe 3).

Como non tiñan nin idea de construción e non sabían por onde empezar, decidiron repartir a tarefa, un faría a planta baixa e outro faría o tellado.

Imaxe 2

Imaxe 3

Adoito preguntar por onde queren empezar, pola planta de abaixo ou polo tellado? Se deciden empezar polo tellado, PERFECTO!!!, no caso contrario, argumento que os papiroflectas (origamistas ou pregadores de papel, ou matemáticos... como prefirades) estamos un poco tolos así que imos comezar polo tellado.

Imos empezar polo do tellado. O primeiro que fixo o irmán foi marcar cunha cruz onde quería que fose o tellado, primeiro marcou un lado (Imaxe 4), desdobrou e marcou o outro (Imaxe 5) e desdobrou. Cando xa o tiña marcado, decatouse de que era demasiado alto e dividiuno á metade... pero cara ao outro lado (Imaxe 6).

Imaxe 4

Imaxe 5

Imaxe 6

Imaxe 7

Imaxe 8

Neste momento, e dependendo das idades de quen estea facendo a figura, pregunto se trouxeron o “dedo máxico” (que pode variar dependendo das circunstancias e idades dos asistentes) e colocando o papel nesta posición (Imaxe 7) premer con dito dedo no centro para inverter a posición do papel de convexo a cóncavo e, utilizando o outro “dedo máxico” acabar de xuntar o que “pide” o papel e baixar cara á mesa e esmagar polas dobras xa marcadas (Imaxe 8).

Agora sí, xa acabara de facer o tellado.
Como xa rematara, foi falar co seu irmán e díxolle: –“Eu xa rematei co tellado, que tal ti coa planta baixa?” O irmán respondeulle –“Planta baixa?, pero, non ía facer eu o tellado?” Que ocorrera... pois que o outro irmán se equivocara e fixera exactamente o mesmo... outro tellado ;-P
Repetir todos os pasos no outro lado do papel.
Vaia “chafallada” de muíño, non se tiña dereito nin na’... (Imaxe 9)

Imaxe 9

Imaxe 10

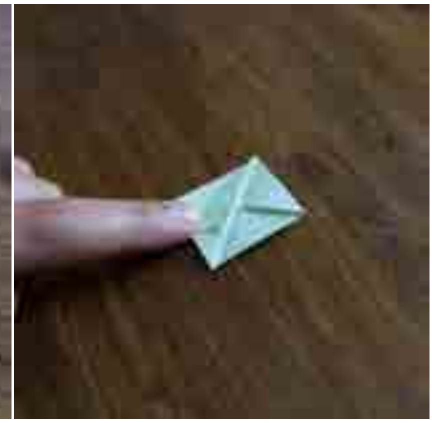
E agora, que podían facer? Pois nada, puxéronse a cavilar no tema e a única solución que se lles ocorreu foi poñerse a estudar, e como antes non había ordenadores...a ver se adiviñades onde foron? *Pausa dramática...* pois á biblioteca! e buscaron un libro de construción de muíños, que é por onde terían que ter empezado...
OLLO! no paso seguinte xa que é quizais no que máis se equivoca a xente. Talvez o truco sexa (de novo) non mover o papel da mesa colocalo de maneira que unha das puntas dun dos tellados apunte cara a ti e dobrar en “monte” (Imaxe 10).

Era un libro moi antigo, tan antigo que tiña as tapas rotas (Imaxe 11).

Pasaron as tapas que estaban rotas e na segunda folla atoparon o índice así que a marcaron para non esquecerse (Imaxe 12). Pasaron esa folla e a seguinte... e na última folla (a anterior ás tapas traseiras, que tamén están rotas) estaba o capítulo onde tiñan a solución para arranxar o problema dos dous tellados do seu muíño, así que a marcaron para que non se perdese (Imaxe 13).


Imaxe 11


Imaxe 12


Imaxe 13

Xa sabían o que tiñan que facer, así que levaron o libro e abrírono ao medio para poder ver as dúas páxinas que lles interesaban (*debe parecer unha cometa*) (Imaxe 14) e puxérono boca abaixo (*coa punta ancha sinalando á barriga de cada un*) para que no se lles cerrase (*Este é bo momento para recordar que non dobren nas mans, senón na mesa)* (Imaxe 15).


Imaxe 14


Imaxe 15

O primeiro que tiñan que facer era arranxar o tema dos dous tellados, así que decidiron quitarlle a punta á parte de abaixo para que asentase ben na terra (Imaxe 16).


Imaxe 16


Imaxe 17

Ben!... xa tiñan unha casiña, pero querían un muíño, así que había que facerlle as aspas. "Cantas lle facemos?" *Sempre o pregunto e, a modo de broma, sumo, resto, multiplico, saco raíces cúbicas... cos números que me dan ata que chego a* CATRO, dúas arriba e dúas abaixo.
Así que cada un dos irmáns levaron as puntas que lles tocaban, dúas para arriba e dúas para abaixo (Imaxe 17).

Como as aspas eran demasiado anchas tiveron que dividilas pola metade (Imaxe 18) "e tachaaaan!!" xa tiñan o muíño construído. *Volvede insistir en que non levanten o "muíño" da mesa.*

Como ían vivir alí, dividírono en dous, un quedou coa parte de enriba e outro coa de embaixo (Imaxe 19) e (Imaxe 20). Ah, que me esquecera comentarvos unha cousa, o irmán que vivía embaixo estaba casado e tiña un fillo, así que necesitaba facer outra habitación e fíxoo dobrando en dous a que tiña (aspas incluídas) (Imaxe 21).

PREMEDE FORTE AÍ CUN DEDO!!!

Imaxe 18

Imaxe 19

Imaxe 20

Imaxe 21

E todos viviron felices e comeron perdices? Pois non... lembrades que na vila deles sempre chovía moito? (*Siiii/Nooonnn*), pois resulta que empezou a chover, a chover... e non escampaba.... e veña a llover... choveu tanto que, sabedes o que pasou?... pois que se inundou o muíño... e o único que atoparon os irmáns ao día seguinte foi un montón de.... RAS SALTARINAS (Imaxes 22, 23 e 24).

Imaxe 22

Imaxe 23

Imaxe 24

Non quixera despedirme sen antes agradecer a todos os creadores e amigos papiroflectas as súas ensinanzas e os moitos e bos ratos que me fixeron pasar, así como a Alicia por me propoñer como o seu substituto; a Gonzalo pola súas confianza para deixarme dar os obradoiros na Feira Matemática (podedes contar comigo para as próximas) e a Sandra Sambade, sen a que este artigo non tería sido posible. E tal e como se despide unha amiga miña papiroflecta... VÉMONOS DOBRANDO! :P

Para Inma, a miña muller, a miña roca e compañeira e moito máis
(gracias por aturarme todos estes anos coas miñas afeccións)
e para Izan, meu fillo, do cal recordei miralo todo con ollos de neno
(que sen dubida é a mellor maneira de mirar).

ROBERTO C. SANTOMÉ VARELA
Asociación Española de Papiroflexia
<rsantomev@yahoo.es>

Para todas as idades

VÍCTOR POLLÁN FERNÁNDEZ

Recensións Matemáticas

Todos estamos convencidos de que para mellorar a competencia matemática, os nosos alumnos e alumnas necesitan ter unha boa competencia lingüística, e unha das maneiras máis efectivas de logralo, senón a única, é a través da lectura. Polo tanto, consideramos importante facilitar entre todos unha selección de lecturas que orienten aos compañeiros e compañeiras nesa faceta da educación matemática.

Por esta razón mantense esta sección, xa clásica, na nosa revista, con dous obxectivos principais: que sirva de solaz para o profesorado e tamén de información, co fin de facilitarlles aos seus alumnos e alumnas títulos que lles poidan axudar na aventura de descubrir o apaixonante mundo das matemáticas desde visións diferentes aos libros de texto ou dos apuntes das clases. En calquera caso, sempre serán un complemento educativo para a súa formación persoal en xeral e non só matemática.

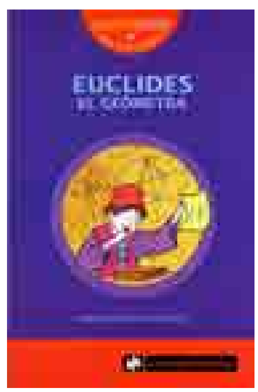
Título: 365 pingüinos
Autor: Jean-Luc Fromental
Editorial: Kokinos
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2006
Páxinas: 22 páx.
ISBN: 978-84-96629-40-0
Idade: 8-10 anos

Interesante para primeiros lectores, e primeiros "contadores". Polos divertidos debuxos, a historia, o formato e, incluso, polo seu tamaño resulta un libro distinto. Tamén é axeitado de cara ao alumnado con necesidades educativas especiais, reforzos ou PCPI.

Título: El fantasma que odiaba las matemáticas
Autor: Rafael Ortega de la Cruz
Editorial: Nivola
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2008
Páxinas: 158 páx.
ISBN: 978-84-92493-10-4
Idade: 8-10 anos

Unha nena á que non se lle dan ben as matemáticas, coñece unha pequena pantasma que ten máis dificultades ca ela na resolución de problemas. É unha historia onde o lector pode participar mediante a resolución dos problemas que se lles van presentando ás dúas protagonistas, e onde a nena, convertida en mestra, vai dando bos consellos ao seu amiguiño para conseguir resolver as cuestións que lle propoñen no cole das pantasmas.

Título: Euclides el geómetra
Autor: Laura Sánchez Fernández
Colección: sabelotod@s nº 64
Editorial: El rompecabezas
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2009
Páxinas: 108 páx.
ISBN: 978-84-96751-76-7
Idade: 12-14 anos



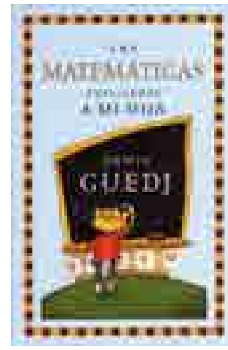
Unha viaxe de Alexis e a súa irmá Dafne lévanos ao tempo de Euclides en Alexandría. Alexis estudará no Museo a carón da Biblioteca, e recibirá clases do gran matemático. Alexis ensinaralle á súa irmá, polas tardes, o aprendido no Museo pois ela, por ser muller, non pode asistir ás clases.Ao final das leturas desta colección inclúense un dicionario de palabras non habituais e actividades solucionadas relativas á lectura.

Título: Fibonacci y los números mágicos
Autor: Esteban Rodríguez Serrano
Colección: sabelotod@s nº 68
Editorial: El rompecabezas
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2010
Páxinas: 123 páx.
ISBN: 978-84-15016-04-5
Idade: 12-14 anos

Esta lectura describe como unha viaxe de Leonardo, acompañando ao seu pai, permítelle establecer contacto con profesores árabes que lle ensinaron as cifras indias, como facer operacións máis rápido, o número áureo, ... Ao final das lecturas desta colección inclúense un dicionario de palabras non habituais e actividades solucionadas relativas á lectura.

Título: Las matemáticas explicadas a mi hija
Autor: Denis Guedj
Editorial: Paidós
Lugar de edición: Barcelona
Ano de edición: 2009
Páxinas: 142 páx.
ISBN: 978 - 84-493-2223-5
Idade: 14-16 anos

De forma sinxela desenvólvese en 7 capítulos a explicación de conceptos matemáticos que van desde redución a común denominador ata pequenos resultados de álxebra, lóxica ou xeometría. Destacan, en claridade e amenidade, os primeiros capítulos.



Título: Un teorema en la biblioteca
Autor: RSME
Editorial: Anaya
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2009
Páxinas: 212 páx.
ISBN: 978-84-667-8521-1
Idade: 14-16 anos

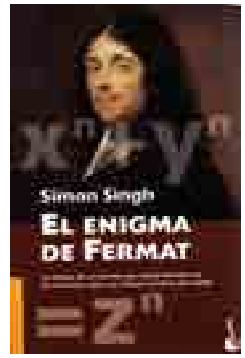
Selección dos relatos gañadores do concurso da Real Sociedad Matemática Española, do ano 2007, sendo o segundo da colección, o primeiro foi o correspondente ao ano 2008. É de destacar a introdución cuxo tema de fondo son as manifestacións de escritores ao longo da historia e a súa posición respecto ás matemáticas.

Título: La hermandad invisible
Autor: Kurt Aust
Editorial: Destino
Lugar de edición: Barcelona
Ano de edición: 2008
Páxinas: 505 páx.
ISBN: 978-84-233-4030-9
Idade: 16-18 anos

Ante o aparente suicidio da súa ex-muller, un matemático experto en Newton comeza a busca de probas e indicios que aporten unha explicación á súa morte. Van aparecendo as obsesións cos números primos, amigos á aplicación de claves e contrasinais, ao tempo que nos adentramos na parte menos coñecida da obra de Newton, a súa posible relación coas investigacións alquímicas, dentro dunha trama onde se utiliza a pertenza del a unha irmandade secreta.

Título: Matemagia
Autor: Fernando Blasco
Editorial: Temas de hoy
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2007
Páxinas: 278 páx.
ISBN: 978-84-8460-611-6
Idade: 16-18 anos

Un achegamento á maxia, ou ás matemáticas, fundamentalmente á maxia que xorde dos números pero tamén está a maxia e a súa cercanía á topoloxía, á probabilidade, etc. Ameno, fácil de ler, e con trucos sinxelos.



Título: El enigma de Fermat
Autor: Simon Singh
Editorial: Planeta
Lugar de edición: Barcelona
Ano de edición: 2006
Páxinas: 317 páx.
ISBN: 84-08-06570-6
Idade: 18-20 anos

Un ameno percorrido pola historia das matemáticas, mesturado con declaracións de A. Wiles, o matemático que conseguíu demostrar o "último teorema de Fermat".

Título: Borges y la matemática
Autor: Guillermo Martínez
Editorial: Destino
Lugar de edición: Madrid
Ano de edición: 2007
Páxinas: 214 páx.
ISBN: 978-84-233-39440
Idade: 18-20 anos

Nesta obra plásmanse unhas conferencias sobre Borges e as matemáticas, que o autor impartíu no ano 2003. De forma amena vai analizando e desentrañando as ideas de Borges tal e como van aparecendo na súa obra ao longo de capítulos cuxos títulos son, entre outros: Os xemelgos, o sumidoiro de Deus, solucións e desilusións, etc.

Título: Crímenes pitagóricos
Autor: Tefcros Mijalidis
Editorial: Roca
Lugar de edición: Barcelona
Ano de edición: 2008
Páxinas: 200 páx.
ISBN: 978 -84 92429-45-5
Idade: 18-20 anos

A cabalo entre a antiga Grecia e os comezos do século XX, co telón de fondo do congreso onde Hilbert deu a coñecer os famosos problemas, o protagonista ten que enfrontarse ao asesinato dun amigo seu, temén matemático. O final enlaza dun xeito sorprendente co título.

VÍCTOR POLLÁN FERNÁNDEZ
IES Poeta Díaz Castro - Guitiriz
<victorpollan@edu.xunta.es>

ACTIVIDADES

XVI Olimpiada Matemática Galega para 2º da ESO (2014)

AGAPEMA ZONA VIGO

Este ano celebrouse a XVI edición da Olimpíada Matemática Galega para o alumnado de 2ºESO, e ao igual que nos nove anos anteriores, a organización da mesma correu a cargo de AGAPEMA, coa colaboración do Concello de Vigo, Centro Residencial Docente, CIFP Manuel Antonio, Fundación Barrié, Imatxina e Anaya.

Como é costume a Olimpíada desenvólvese en varias fases:

1º Fase de centros: O profesorado de matemáticas que imparte clase en 2ºESO prepara e selecciona o alumnado que presentará as probas, presentando como máximo a dous alumnos por cada grupo de 2ºESO do centro.

2º Fase de Zona: Celébranse simultaneamente nas zonas de Coruña, Santiago, Lugo, Ourense, Pontevedra e Vigo as probas que clasificarán os 40 mellores alumnos para a seguinte fase. A selección destes alumnos é proporcional ao número de presentados en cada unha das zonas.

3º Fase Final Galega: Como nas edicións anteriores celebrouse en Vigo no Centro Residencial Docente de Vigo e no CIFP Manuel Antonio. Nesta fase clasificáronse os tres alumnos que participaron na Olimpíada Matemática Nacional, que este ano se celebrou en Barcelona entre os días 25 e 27 de xuño.

Fase de Zona

A fase de zona celebrouse o 25 de Abril, e o número de participantes distribuíuse da forma seguinte:

Zona	Nº Centros	Nº Alumnos
A Coruña	13	59
Santiago	12	65
Lugo	8	30
Ourense	9	42
Pontevedra	15	62
Vigo	19	84

Os problemas que tiveron que resolver os alumnos foron os seguintes:

Problema 1

O irmán maior de Rosa, a nova amiga de Sandra, está estudando Matemáticas na Universidade. Dende pequeno gústalle resolver problemas. Na súa última visita deixoulle este a Sandra para que coñeza a súa idade:

> *"O meu ano de nacemento é a suma de todos os números de tres cifras que cumpren a seguinte propiedade: se borras a primeira cifra tes un cadrado perfecto; se en lugar diso, borras a última cifra do número, tamén tes un cadrado perfecto".*

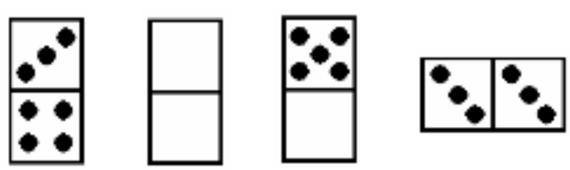
En que ano naceu o imán maior de Rosa?

Problema 2

No instituto de Isabel acaban de construír un patio novo en forma circular. Paco e Xosé Manuel están sentados en puntos diametralmente opostos do patio. Cando Isabel aparece na porta, ambos comezan a correr en liña recta cara a ela. Unha vez que percorreron 10 m, Paco xa chegou xunto a Isabel, mentres que Xosé Manuel aínda ten que percorrer 14 m para alcanzalos. O patio está recuberto dunha moqueta para evitar caídas. Se cada metro cadrado de moqueta custa 2,5 €, canto custou a moqueta de todo o patio?

Problema 3

As fichas do xogo do dominó son rectángulos formados a partir da unión de dous cadrados. Neses cadrados hai puntos que poden variar de 0 a 6. Así temos a ficha 3-4 (ou 4-3 que é a mesma), a 0-0 (coñecida como branca dobre), a 0-5, a 3-3, etc.



Un xogo completo de dominó componse de 28 fichas.

a) Se quixésemos facer un dominó no que os puntos de cada cadrado só fosen de 0 a 4, cantas fichas tería o xogo completo?

b) E se os puntos fosen de 0 a 10?

c) E se os puntos fosen de 0 a n?

Problema 4

Andrea, Isabel, Maite, Natalia, Rosa e Sandra son coleccionistas de cadros e dúas delas son compañeiras de traballo.

Un día foron xuntas a unha exposición e mercaron da seguinte maneira:

- Andrea comprou 1 cadro, Isabel comprou 2, Maite 3, Natalia 4, Rosa 5 e Sandra 6.
- As dúas compañeiras de traballo pagaron a mesma cantidade de diñeiro por cada un dos cadros que compraron.
- As demais do grupo pagaron o dobre por cada cadro do que pagaron as compañeiras de traballo.
- En total pagaron 100 000 euros.
- O prezo de cada cadro era un número enteiro de euros.

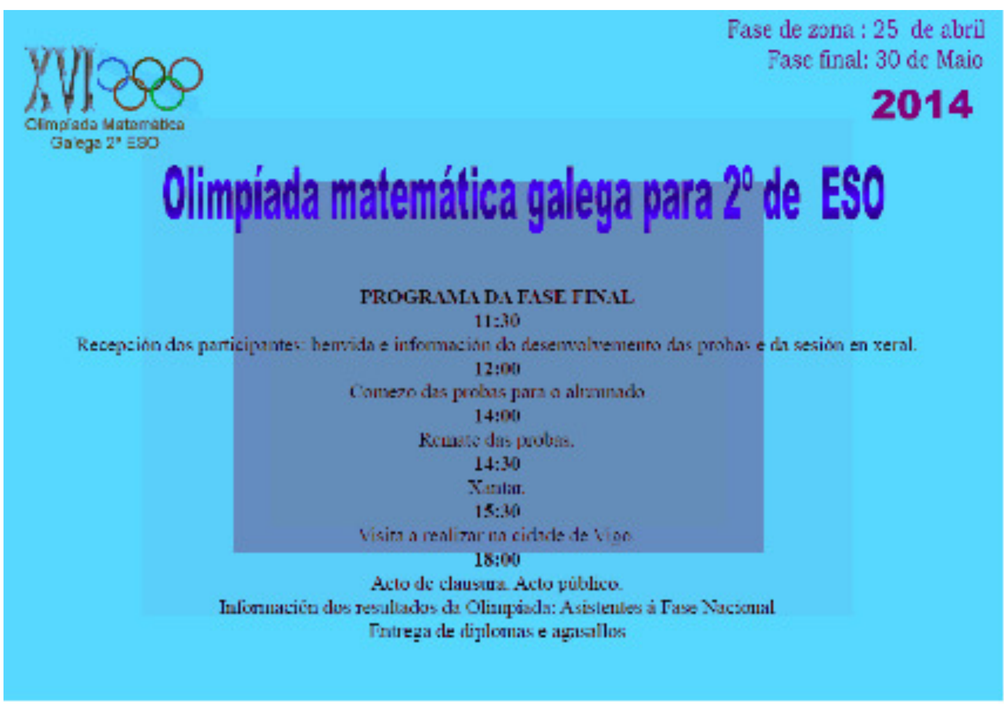
Cales son as dúas compañeiras de traballo? Explica por que.

Problema 5

Nunha bolsa opaca teño sete caramelos iguais, só que dous teñen sabor a limón e os cinco restantes sabor a laranxa. Se saco dous caramelos ao chou, é máis fácil que sexan do mesmo sabor ou de distinto sabor?

Fase Final Galega

O 30 de Maio celebrouse como nas edicións anteriores a Fase Final Galega en Vigo co seguinte programa:



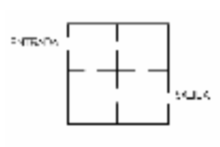
Os problemas que tiveron que resolver os alumnos foron:

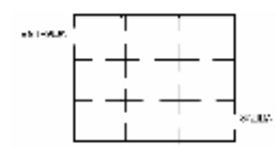
Problema 1

Na súa última clase de Matemáticas, o profesor de Xulio estívolles falando sobre criptografía. Ao chegar á casa, Xulio creou o seu propio código de encriptación para números: dado un número enteiro, escribe o produto das dúas primeiras cifras; logo multiplica a segunda pola terceira, e así sucesivamente. Por exemplo, comezando con 5 648, transfórmao en 302 432. De que números pode proceder 5 648 se fora o resultado dunha encriptación de Xulio?

Problema 2

As salas dun Museo son cuartos como as que se mostran na figura. Cada cuarto está conectado por unha porta con cada un dos cuartos cos que comparte un lado. A entrada e a saída do Museo están situadas en cuartos diametralmente opostos. Nos debuxos aparecen dous deseños diferentes de Museo. O da esquerda



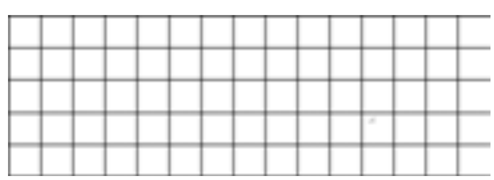


está formado por catro cuartos dispostos como un cadrado, diremos que é un Museo 2×2. O da dereita é un Museo 3×3.

Un visitante do Museo que entra pola ENTRADA desexa visitar cada cuarto exactamente unha vez e saír pola SAÍDA. A estes percorridos chamarémolos camiños aceptables.

a) Podes encontrar un camiño aceptable no Museo 2×2? E no Museo 3×3?

b) Inténtao nos Museos 4×4 e 5×5 (debúxaos e intenta encontrar camiños aceptables neles).



c) Nalgúns dos anteriores Museos non puideches encontrar ningún camiño aceptable e é que, ás veces, é imposible. Explica por que nalgúns casos non é posible encontrar un camiño aceptable. (Quizais che axude imaxinarte un taboleiro de xadrez).

d) Podes imaxinarte museos máis grandes, 20×20, 35×35, e ver se hai un camiño aceptable ou non. O mesmo poderías facer cun Museo que sexa da forma N×N, onde N representa un número calquera. Poderías dar unha regra xeral que nos permita decidir se nun Museo cadrado N×N imos poder encontrar un camiño aceptable?

e) Imaxínate agora un Museo de dimensión 10×15, ou ben 25×40. O mesmo poderías facer cun Museo que sexa da forma N×M, onde N é un número calquera e M é outro número calquera distinto de N. Que condicións han de cumprir N e M para que nun Museo N×M haxa con seguridade un camiño aceptable?

Problema 3

"Esta finca tenche forma de triángulo equilátero de 115,5 metros de lado, e xusto aquí, neste punto do interior da finca onde me sento, hai unha distancia de 20 metros a un dos lados, e de 30 metros a outro dos lados e de ... ben, a ver se es capaz de dicirme ti cantos metros hai dende este punto ao outro lado."

Problema 4

Temos seis cartas da baralla sobre a mesa. Sabes que só dúas son reis, mais non sabes onde están colocadas. Elixe dúas (delas) e dálles a volta. Que é máis probable?
Que haxa polo menos un rei entre esas dúas cartas.
Que non haxa ningún rei entre esas dúas cartas.

Problema 5

Despois dunha dura xornada de traballo, Roi, Daniel, Mencía, Hugo, Antía e Luis van xantar a un restaurante.
Antía, Daniel e quen comeu pescada, pediron viño branco.
Mencía mira con envexa ás persoas que elixiron xabaril e pato á laranxa.
Roi e Daniel están sentados fronte aos que comen tortilla e o pato á laranxa.
Roi, Mencía e Hugo elixiron un prato de carne.
Quen pediu un filete? E os caracois?

O alumnado, despois de realizar as probas e de xantar, deron un paseo polo casco vello de vigo. O acto de clausura estivo presidido polo concelleiro de Educación do Concello de Vigo, Don Héctor Santos, polo Presidente de Agapema, Don Julio Rodríguez Taboada e pola Directora do CIFP Manuel Antonio, Doña Adelaida Saa Sarria. Neste acto entregáronse agasallos a todos os participantes na fase final e como colofón final proclamáronse os tres gañadores da mesma que foron:

- **Iván Cerviño Paz**, IES Eduardo Pondal, Santiago de Compostela.
- **Juan Carlos Navares Vázquez**, Colexio Guillerme Brown, Ourense.
- **Diego Valiño Carneiro**, CPR Montesol, Vigo.

Estes tres alumnos pasaron a Fase Nacional que se celebrou en Barcelona, onde acudiron acompañados por Julio Ferro, membro de Agapema Vigo.

XIV Rebumbio Matemático

AGAPEMA ZONA A CORUÑA

Nesta XIV edición do Rebumbio Matemático participaron un total de 66 clases de 6° de primaria de colexios de toda Galicia.
Como en anteriores ocasións, na fase de centro clasifícase, dentro de cada clase, un grupo de tres alumnos que pasa á fase de zona. Esta fase celebrouse o 25 de abril nas sedes de Lugo, Vigo, Pontevedra, Santiago e A Coruña e os problemas que tiveron que resolver pódense consultar no seguinte **enlace**.
Desta fase de de zona, e de xeito proporcional ao número de grupos presentados en cada unha, pasaron 15 **equipos** á final que se celebrou na Coruña o día 23 de maio.
Coma sempre os equipos tiveron que resolver, traballando colaborativamente, seis problemas que presentan situacións contextualizadas e que non teñen unha única solución ou un único camiño para afrontalos. Á hora de calificar as solucións tense en conta a orixinalidade, a explicación do camiño elixido, as solucións atopadas e a orde e claridade da presentación.

Alumnado na fase final.

Os problemas da final tamén se atopan colgados na páxina web de AGAPEMA e pódelos ver premendo **aquí**.

Despois da sesión de problemas os finalistas disfrutaron dunha visita e comida de convivencia na Casa dos Peixes, onde ás 16:30 foron entregados os premios e recordos a todos os participantes, así como os premios aos tres equipos gañadores.

- **1º Premio: Equipo Factor x**, do centro CPR Sagrado Corazón Mercedarias (Ferrol), formado polos estudantes:

  Henar Mariño Bodelón

  Lucía Picos Maiztegui

  Bruno Fuertes Agras

- **2º Premio: Equipo Equiláteros**, do centro CPR Calasanz PP Escolapios (A Coruña), formado polos estudantes:

  Nuria Richer Gusano

  Raquel Sevilla Carro

  Emma Suárez Pereira

- **3º Premio: Equipo 2+1=3**, do centro CEIP San Roque Darbo (Cangas), formado polos estudantes:

  Inés González Poses

  Adán Rodal Vilas

  Jorge Paredes Costa

Podes atopar fotografías das fases de zona e final, problemas de anos anteriores e máis información sobre esta actividade na web de **AGAPEMA**.

VIII Feira Matemática

COMISIÓN ORGANIZADORA

A oitava edición da Feira Matemática celebrouse este ano o 26 de abril adiantándonos ás datas habituais, o que parece que motivou unha participación diferente. Algúns sinalaron que este adianto foi beneficioso, pois así distanciouse do final do curso, que sempre é un período onde se xuntan moitas actividades nos centros educativos. Pola nosa parte supuxo un esforzo, pois acurtáronsenos os prazos e ademais coincidiu a semana anterior coas vacacións de Semana Santa.

Porén, a Feira celebrouse perfectamente, pois a colaboración das institucións e de todos os participantes é o que fai que este evento educativo teña o éxito que estamos a ver medrar ao longo de todos estes anos.

O lema que adoptou este ano a Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para o Día Escolar das Matemáticas foi **"Matemáticas e Computación"**, e así o adoptamos nós tamén para a **Feira**. O Día Escolar das Matemáticas (12 de maio, aniversario do nacemento de Pedro Puig Adam) foi establecido como unha oportunidade para realizar actividades que visualicen as matemáticas e a súa importancia na nosa sociedade. Este ano elixiuse a computación no máis amplo sentido do termo, e así o entenderon os participantes na Feira Matemática, que colaboraron para amosar esa relación sempre presente entre as Matemáticas e todas as actividades e situacións cotiás.

Ás 11 horas foi a inauguración oficial, pero xa dende as 9 as nenas e nenos participantes, madrugadores e ilusionados, xunto co seu profesorado, estaban petando nas portas do edificio de PALEXCO onde tamén este ano celebramos a nosa Feira. Todos estaban cargados de artiluxios e caixas cheas do froito do seu traballo que con gran ilusión esperaban amosar ao público durante as seguintes horas.

As autoridades chegaron puntuais, acudiron D. Francisco José Mourelo Barreiro, Concelleiro de Educación, Deportes e Xuventude da Coruña, e D. Ricardo Cao Abad, Vicerreitor de Investigación e Transferencia da Universidade da Coruña. Despois das verbas de benvida fixémonos todos a foto tradicional nas escaleiras exteriores do Hall de Proa.

De seguido comezaron as actividades que estaban recollidas no **programa**, unha tras outra, onde o público participou moi por riba das nosas expectativas, chegando case a colapsar algún dos espazos.

Este ano batemos record de participación, pois contabilizamos 1423 persoas entre o público que nos visitou, nenos e adultos, aos que hai que engadir os 463 estudantes que se foron turnando ao longo do día ao fronte dos distintos postos e os 65 profesores que os acompañaban.

As actividades comezaron cun Obradoiro de Papiroflexia, ao fronte do cal estaba Roberto Santomé Varela, quen asistiu por primeira vez, e que encheu a súa mesa de paxariños, animais e outras figuras que puideron levar de recordo, así como aprender a facelos, moitos dos rapaces que se apiñaban ao redor da súa mesa.

Ás 12, na Sala Azimut, os estudantes Jesús Fontán Dapena, Nerea Santiago Barrio, Sofía Pérez-Ardá Rodríguez e Uxía García Castiñeiras, do IES A Xunqueira I (Pontevedra), gañadores do **"III Concurso Incubadora de Sondaxes e Experimentos"** convocado por SGAPEIO (2º ciclo da ESO), e acompañados pola súa profesora, Mª Carmen Quireza Ramos, contáronnos o seu traballo **"E ti como empezas o día?"**.

Case ao mesmo tempo, no Corredor de Babor, empezaron os concursos de Sudokus, xa tradicionais na Feira, que se foron repetindo ao longo de toda a xornada. Esta actividade está organizada polo noso compañeiro José Antonio Varela García (Cheché), do IES Francisco Aguiar de Betanzos, acompañado por varios estudantes. Tamén de seguido puidemos ver aos estudantes do IES Eusebio da Guarda facendo unha emocionante exhibición de como rotar vertixinosamente as pezas do Cubo de Rubik para conseguir ordenar de maneira correcta as cores. Este ano non nos acompañou nesta actividade Ernesto

Fernández, quen estaba moi ocupado na preparación dun xigantesco **mosaico con cubos de Rubik** coa imaxe de Rafa Nadal e Iker Casillas no Charity Day do Mutua Madrid Open.

Xa chegados ás 13 horas, volvemos á Sala Azimut para escoitar a ilustrativa conferencia "Un río, camiños e segredos", que nos regalou Mª José Souto Salorio, profesora do Departamento de Computación da Facultade de Informática, quen falou de diversos fitos ao longo da historia da computación.

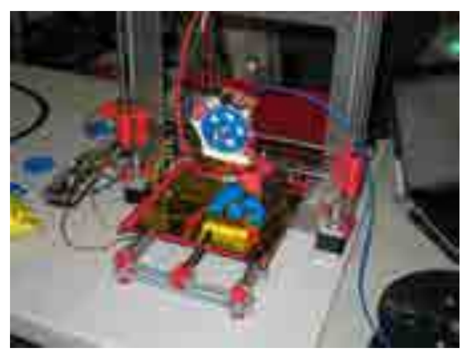
Aínda que sen pechar as portas nin os distintos postos, que case todos seguiron operativos e con afluencia de visitantes, puidemos aproveitar logo algúns momentos máis pausados para xantar cos bocatas que nos trouxo Alfredo. Repuxemos forzas e continuamos a partires das catro con máis concursos de Sudokus e exhibicións de Cubos de Rubik.

A tarde presentouse moi ben, cunha afluencia de público case maior que a da mañá, o día facía honra á primavera e as familias chegaban con rapaces ávidos de aprender, xogar e coñecer máis cousas das matemáticas, aínda que quizais eles non se desen tanta conta disto. Chegados ás seis da tarde, xa tendo moi preto a hora de remate da festa e co Hall de Proa cheo a rebordar (quizais na vindeira Feira deberíamos rematar un pouco máis tarde, pensarémolo), temos unha nova actuación na Sala Azimut: a presentación dos Matmonólogos e Esopías.

Este ano tivemos unha novidade importante, pois o VIII Concurso de Fotografía Matemática realizouse a través dun blog, o **MATEBLOG**, feito en colaboración coa Fundación Barrié. Aproveitando esta opción virtual, ao concurso de fotografía engadímoslle dous concursos máis, que xa se viñan convocando por parte do compañeiro Gonzalo Temperán nun instituto de A Coruña. Foron o VI Certame de Matmonólogos e o II Concurso de Esopías. A facilidade de envío dos traballos para estes concursos a través da web incrementou moito a participación, así recibimos 100 esopías, 105 fotografías e 7 matmonólogos.

Pois ás 6 da tarde o que puidemos ver na Sala Azimut foi a presentación dunha selección das esopías presentadas ao concurso, lidas e comentadas polo noso compañeiro Gonzalo Temperán, e tamén dos monólogos matemáticos que concursaban. E ao rematar, xa no Hall de Proa, fixemos entrega dos premios aos gañadores destes tres concursos.

Ademais deste relato das actividades que aparecen no programa, non podemos deixar de mencionar o que é a esencia mesma da Feira Matemática, os postos, onde se fan as transaccións típicas de toda feira, aínda que nesta particular, esas non son monetarias, senón de coñecemento. Os postos estiveron moi ocupados toda a xornada, atendidos por moitas rapazas e rapaces dos colexios participantes, e tamén contamos con outros de entidades, algunhas xa coñecidas de anteriores anos (como o Instituto Galego de Estatística, os Museos Científicos Coruñeses, o Programa de Ocio Educativo do Concello da Coruña, o Proxecto EsTalMat, a Xefatura Provincial de Tráfico da Coruña e MotivaCEV) e outras que nos acompañaron por vez primeira (BricoLabs, Centro de Supercomputación de Galicia e EducaBarrié).



Impresora 3D

Como este ano a Feira estaba dedicada á Computación, varias das actividades que se amosaban nos postos tiñan que ver con este tema. Chamaron moito a atención varias cousas, entre elas as dúas impresoras 3D que trouxeron os de BricoLabs, montadas por eles mesmos, e que estiveron construíndo durante toda a xornada pezas de plástico que os visitantes puideron levar de recordo. Outra actividade que asombrou aos rapaces máis pequeniños foi a bola de cores que podían dirixir polo chan, a través dun circuíto, por medio dunha tableta e que estaba no posto do CEIP Ponte dos Brozos. E non menos interese recibiu a "mariquiña" que tiñan no posto da Escola Infantil de Barrionovo, que os rapaces programaban para que percorrera un circuíto debuxado sobre o chan.

(a) CEIP Ponte dos Brozos

(b) Escola Infantil de Barrionovo

E xa resumindo, antes de rematar falando das exposicións temos que falar do mago que tivemos toda a xornada. Foi un estudante da Facultade de Ciencias da Educación, Fernando Funes, quen nos asombrou con eses números de maxia de proximidade, con cartas e moedas.

As exposicións son un espazo que en todas as edicións da Feira Matemática tentamos manter, pois é unha maneira diferente e necesaria, de amosar a relación entre as matemáticas e a sociedade. Neses espazos amósanse as cousas dunha maneira mais repousada, onde o espectador ou visitante pode tomar o seu propio ritmo e interaccionar cos obxectos expostos segundo o seu interese. Este ano tivemos catro exposicións. Na mesma entrada da Feira tíñamos "Arredor de π", onde podíamos ver un enorme número 3, seguido dos **primeiros douscentos vinte decimais** do número pi. Todo isto acompañado de fotografías e carteis onde se explicaba a presenza deste asombroso número.

Outra exposición, que foi elaborada pola compañeira Dorinda Mato, titúlase "As mulleres nas Artes e nas Ciencias" e, facendo un percorrido ao longo da nosa historia, quere amosar a presenza continua, aínda que case sempre escondida ou ocultada, da muller no desenvolvemento da ciencia.

Os ordenadores non podían deixar de constituír outra exposición nunha Feira dedicada á Computación. Montamos unha pequena exposición, "Os nosos vellos ordenadores", con pezas cedidas pola Facultade de Informática. Puidemos ver dous portátiles IBM (un deles de 15 kg de peso, claro), un aparatoso disco duro, o primeiro PC de IBM e o Macintosh de 512 Kb (precursor dos actuais Apple) entre outras vellas glorias.

A cuarta exposición foi a de "Fotografía Matemática", montada por EducaBarrié coas fotografías presentadas ao concurso do Mateblog.

Rematada a Feira Matemática e xa pensando na novena edición, temos que agradecer a colaboración das distintas entidades, públicas e privadas, que fan que eventos como este poidan celebrarse.

A Comisión Organizadora da VIII Feira Matemática
ISABEL MIGUÉLEZ POSE
Mª CRISTINA NAYA RIVEIRO
MARISOL PÉREZ BLANCO
SANDRA SAMBADE NIETO
FRANCISCO ÁLVAREZ FONTENLA
MANUEL PAZOS CRESPO
GONZALO TEMPERÁN BECERRA
ENRIQUE DE LA TORRE FERNÁNDEZ

VI Congreso de AGAPEMA

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA

Os días 7 e 8 de setembro de 2012 celebrouse na facultade de Matemáticas de Santiago de Compostela o VI Congreso de Educación Matemática de AGAPEMA, unha nova edición dunha actividade que xa se vai convertendo nun clásico para gran parte do profesorado de Matemáticas de Galicia. Esta edición contou cunha numerosa participación de profesores e profesoras de todos os niveis educativos, dende Educación Infantil ata profesorado universitario, sendo maioría o colectivo de profesorado correspondente aos niveis do ensino medio. Foron preto do centenar de asistentes os que compartiron experiencias e intereses neste encontro, cantidade que se pode considerar como moi satisfactoria, tendo en conta as datas e a coincidencia da actividade cos traballos propios do inicio do curso.

O congreso comezou na tarde do venres 7, cunha conferencia plenaria impartida polo noso compañeiro Santiago López Arca, profesor do IES Otero Pedraio (A Coruña), na que, baixo o suxestivo título de "Matemáticas sorprendentes", reproduciu unha clase de Matemáticas na que a sorpresa exercía como elemento motivador para o alumnado, captando a atención dos mesmos e aumentando o seu interese polos contidos a traballar.

Santiago incidiu na importancia da motivación, de introducir un elemento de sorpresa en cada clase, tentando así manter a atención do alumnado, un certo "suspense", agardando ese momento. Tamén amosou exemplos da cantidade de recursos que o profesorado ten ao seu alcance para que esas "matemáticas sorprendentes" estean presentes nas súas clases. Todo o profesorado asistente aplaudiu unanimemente as propostas do conferenciante, sendo esta intervención unha das máis valoradas do congreso.

"Coque" presenta a Santiago López Arca.

Posteriormente deron comezo os diferentes relatorios (comunicacións e obradoiros), que trataron temas moi variados: cociña e Matemáticas en Infantil, un eclipse de Sol, traballo con recursos informáticos como Moodle, Wiris ou calculadoras (podes consultar o programa do VI Congreso **aquí**).

As comunicacións e obradoiros continuaron o sábado ao longo de toda a xornada, presentándose experiencias de moito interese para o profesorado asistente, exemplos de proxectos de innovación educativa en todos os niveis: dende a aprendizaxe do número nas primeiras idades ata experiencias co GeoGebra 4, pasando por experiencias sobre modelización, papiroflexia, libros dixitais ou redes sociais. Como exemplo de que podemos atopar Matemáticas (e recursos para o seu ensino) en case calquera entorno, presentouse un traballo sobre as Matemáticas do Pórtico da Gloria, amosando unha fermosa mostra do aproveitamento do patrimonio para traballar esta materia nas aulas.

Encarna Reyes finaliza a súa conferencia.

O congreso rematou na tarde do sábado 8 cunha conferencia plenaria, a cargo da profesora Encarna Reyes Iglesias, da universidade de Valladolid, co título "Tendendo pontes entre a natureza, a arquitectura e as Matemáticas". A conferenciante puxo múltiples exemplos nos que a arquitectura copiaba elementos da natureza na procura de certas propiedades concretas de resistencia, elasticidade ou estéticas. En cada un dos casos expostos, Encarna fixo unha explicación detallada das Matemáticas que hai detrás de cada propiedade, de cada forma, do porqué da elección dunhas fronte a outras en función das necesidades concretas de cada construción. Foron uns exemplos moi ilustrativos da relación existente entre a natureza, a ciencia e a tecnoloxía, explicada e modelizada coa linguaxe e coas ferramentas da Matemática.

Ademais de todas estas actividades, directamente relacionadas coa formación do profesorado e co ensino das Matemáticas, existiron tempos e espazos deseñados especificamente para a interacción entre todo o profesorado participante: os momentos de descanso na metade de cada sesión, a cea do venres, a asemblea extraordinaria na que se presentaron as actividades de AGAPEMA, foron moi enriquecedores á hora de permitir a interacción entre os asistentes, o intercambio de experiencias e de intereses, a toma de contacto da que poden xurdir posteriores colaboracións. Todo o profesorado participante agradeceu á organización a posibilidade de contar con estes tempos dentro do axustado programa da actividade.

Ao longo dos dous días nos que se desenvolveu a actividade, todos os participantes coincidiron en valorar moi positivamente a estrutura do congreso, a organización do mesmo e o excelente clima de convivencia e colaboración existente. Estas apreciacións fan que dende AGAPEMA reafirmemos a nosa aposta pola mellora da calidade do ensino das Matemáticas en Galicia, traballando arreo na organización de novos eventos nos que o profesorado de Galicia poida coñecer e intercambiar experiencias e traballos de innovación en Educación Matemática.

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA
Presidente de AGAPEMA
<juliotab@edu.xunta.es>

I Encontro de Ed. Matemática para Infantil e Primaria

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA

O pasado 28 de setembro de 2013 celebrouse, nas instalacións da Facultade de Ciencias da Educación de Santiago de Compostela, a primeira edición dunha nova actividade de formación do profesorado organizada por AGAPEMA: o I Encontro de Educación Matemática para Infantil e Primaria.

Esta actividade naceu como unha aposta pola implicación da asociación nunha mellora da calidade do ensino nas primeiras etapas educativas, tentando encher un oco detectado nos anteriores congresos de AGAPEMA, nos que a presenza de traballos centrados nesas etapas era escasa, como tamén o era a asistencia de profesorado das mesmas.

A resposta do profesorado galego de Infantil e Primaria foi asombrosamente positiva, chegando a acadar 400 persoas inscritas para asistir á actividade. Finalmente foron aproximadamente 300 os profesores e profesoras que asistiron a este encontro, o que supón, xa de entrada, un éxito inesperado e moi esperanzador, que amosa a implicación e o interese do profesorado de Infantil e Primaria pola súa formación en educación matemática.

Presentación das xornadas.

Esta amplísima participación obrigou aos organizadores a programar unha oferta de comunicacións, obradoiros e conferencias suficiente para satisfacer os intereses e as expectativas da totalidade dos asistentes. Seguindo esta premisa programáronse cinco liñas paralelas de comunicacións e obradoiros, ofertando un total de 14 comunicacións, 6 obradoiros e unha conferencia plenaria. Os títulos e autores completos de todos os traballos presentados poden ser consultados na páxina web de AGAPEMA, na ligazón: `http://www.agapema.org/sites/default/files/Programa%20Encontros.pdf`.

Os temas tratados nas comunicacións foron moi variados en canto aos contidos, á metodoloxía e aos niveis educativos implicados (dende 1º ciclo de Educación Infantil ata 3º ciclo de Educación Primaria). Presentáronse exemplos de experiencias interdisciplinares, relacións entre as Matemáticas e outras áreas do coñecemento (arte, contos, ciencia, etc.), novas estratexias e métodos de ensino-aprendizaxe de conceptos matemáticos, actividades que implican o emprego das novas tecnoloxías, materiais manipulativos, as matemáticas na vida real, etc. Non é obxectivo deste artigo recoller con detalle todas as propostas presentadas; pero resulta necesario facer referencia a algúns dos temas tratados, de cara a amosar a diversidade de intereses e de recursos que tiveron protagonismo ao longo da xornada: a estatística en educación infantil, literatura matemática na escola, xogando con dados, recursos interactivos para Primaria, matemáticas no mercado, papiroflexia, traballos con calculadora ou dispositivos móbiles, un artista na aula, atención á diversidade, traballo por proxectos, etc. Estas comunicacións e obradoiros amosan a calidade do ensino destas etapas en Galicia e son fieis exemplos do movemento de innovación educativa existente no ensino de Infantil e Primaria nos centros galegos. Dende AGAPEMA tentaremos apoiar ao profesorado implicado neste proceso de innovación, colaborando cos recursos da sociedade para fomentar a colaboración entre os centros, a formación de grupos de traballo e a organización de actividades de formación. Algúns dos autores destes traballos puxeron a disposición do profesorado materiais sobre as mesmas que se poden visualizar e mesmo descargar na web da asociación, premendo na ligazón: `http://www.agapema.org/?q=materiaisIEncontros`.

A pesar de que, segundo se desprende do manifestado polos asistentes nas enquisas de avaliación, o nivel de todos os traballos presentados foi moi alto, compre destacar a intervención do profesor Tony Martín Adrián, invitado pola organización para impartir unha conferencia plenaria e un obradoiro.

Na conferencia, titulada “A educación matemática no século XXI”, Tony Martín insistiu na importancia de abandonar a metodoloxía do ensino tradicional das matemáticas nos primeiros niveis, centrada principalmente no desenvolvemento de destrezas algorítmicas, apostando por un ensino máis acorde aos tempos actuais, no que prime a comprensión, o emprego do cálculo mental e o complemento das novas tecnoloxías.

Conferencia de Tony Martín.

A xornada concluíu cun obradoiro, co significativo título de “Os algoritmos das operacións aritméticas morreron pero non os enterraron”, no que Tony Martín realizou unha crítica razoada e argumentada do ensino centrado nos algoritmos tradicionais das operacións aritméticas, procedementos doutra época que xa deben ser substituídos por unha axeitada combinación de cálculo mental e electrónico. Amosou aos asistentes vídeos con exemplos do seu traballo no CEIP Aguamansa (Tenerife), nos que nenos e nenas dos primeiros cursos de primaria resolvían con aparente facilidade operacións complexas que contiñan mesmo fraccións e decimais. O profesorado asistente coincidiu en valorar moi positivamente as propostas presentadas polo conferenciante.

A avaliación da actividade, tanto por parte do profesorado asistente, como por parte da organización, non pode ser máis positiva. Tratándose, como xa se comentou, da primeira actividade organizada por AGAPEMA especificamente para o profesorado das primeiras etapas educativas, a resposta deste colectivo foi asombrosa, chegando a superar as expectativas máis optimistas.

Tanto na avaliación da actividade como nas mensaxes enviadas á asociación, o profesorado manifestou a necesidade de que se organicen de xeito periódico xornadas deste tipo, nas que coñecer proxectos de innovación educativa, compartir experiencias cos compañeiros, actualizarse na didáctica das Matemáticas, etc. Esta implicación do profesorado dos primeiros niveis educativos supón unha motivación extraordinaria para a nosa sociedade á hora de dar continuidade a esta actividade, tentando estender por todos os centros de Galicia o espírito innovador e actualizador que todos puidemos vivir neste primeiro encontro.

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA
Presidente de AGAPEMA
<juliotab@edu.xunta.es>

Xornada sobre o Ensino da Estatística

ESTHER LÓPEZ VIZCAÍNO

No ano 2013 celebrouse o Ano Internacional da Estatística ("Statistics2013"). Esta celebración a nivel mundial foi un recoñecemento ás múltiples contribucións da Estatística ao progreso da nosa sociedade. A través da coordinación de máis de 2.250 organizacións en todo o mundo, Statistics2013 pretendeu divulgar a importancia da Estatística entre a comunidade científica, as empresas, a Administración Pública, os medios de comunicación, os traballadores, os estudantes e o público en xeral.

A SGAPEIO foi organización participante desta iniciativa e, como tal, organizou ao longo do ano 2013 varias actividades para celebrar este ano, algunhas especificamente dirixidas a profesores de ESO/Bacharelato. Entre as actividades organizadas por SGAPEIO con ese obxectivo, durante o ano 2013, están a terceira edición do concurso Incubadora de sondaxes e experimentos; a III Fase nacional deste concurso, que se celebrou en Santiago; o XI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións e, por último, a Xornada sobre o Ensino da Estatística que organizamos conxuntamente coa Asociación Galega de Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA), en colaboración con educaBarrié, a iniciativa educativa da Fundación Barrié.

A **xornada sobre o Ensino da Estatística** na ESO e no Bacharelato impartiuse en dúas edicións, unha en A Coruña e outra en Vigo. A xornada da Coruña celebrouse o 9 de novembro de 2013 e a de Vigo, o 31 de outubro de 2013.

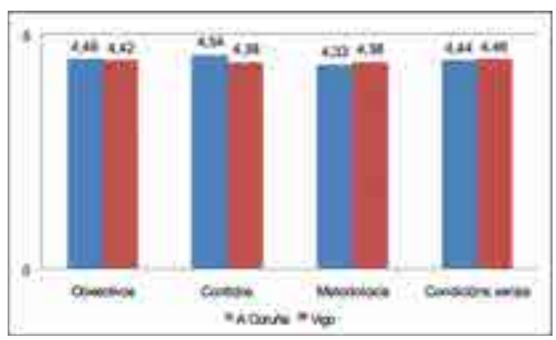
Entre os obxectivos destas xornadas estaban o de mostrar aos profesores diferentes experiencias na aula sobre o ensino da estatística e a investigación de operacións e o de promover a estatística entre os estudantes de secundaria, este último compartido co Ano Internacional da Estatística. Para cumprir con estes dous obxectivos, nas xornadas participaron tanto profesores de ESO/Bacharelato como profesores de universidade e representantes da estatística pública na nosa Comunidade Autónoma.

A xornada iniciouse coa participación de Rosa Crujeiras Casais, profesora do Departamento de Estatística e Investigación Operativa da Universidade de Santiago de Compostela, que nos falou sobre a "Estatística con datos normais e paranormais". A continuación, dous profesores de ESO/Bacharelato expuxeron as súas experiencias na clase cando participaron no Concurso da Incubadora de Sondaxes e Experimentos. A ponencia de Enrique Pujales Martínez, do IES Fernando Wirtz Suárez, xirou en torno ao título "Reflexións e aplicacións da metodoloxía estatística en casos concretos", onde nos contaba, entre outros temas, a súa experiencia cos traballos gañadores das dúas primeiras edicións da Incubadora: "Cantas estrelas podemos ver, a simple vista, desde a nosa localidade?" e "Existe o cine de autor?". A continuación, Covadonga Rodríguez-Moldes expuxo a ponencia titulada "Ameixas, chicles, rectángulos, ... traballos estatísticos con alumnado de secundaria" onde nos contou, entre outros proxectos, a súa experiencia na clase desenvolvendo o traballo gañador da II Incubadora de Sondaxes e Experimentos: "Un dilema para o consumidor: cal é o mellor tamaño para mercar ameixas?". Como última tarefa da xornada de mañá, tivo lugar un obradoiro de Geogebra impartido polo grupo Xeodín. Neste obradoiro, Fernando Zacarías Maceiras e Ignacio Larrosa Cañestro expuxeron as posibilidades do Geogebra para traballar coa estatística.

A xornada da tarde iniciouse coa profesora de ESO/Bacharelato do IES Daviña Rey de Monforte de Lemos, Mª Jesús Casado Barrio. Mª Jesús expuxo a ponencia titulada "Proxecto de estatística con ferramentas de google" onde nos explicou as posibilidades que ofrecen as novas tecnoloxías para o desenvolvemento de proxectos estatísticos na aula. A continuación celebrouse un obradoiro do portal educativo do Instituto Galego de Estatística (IGE). Esther Calvo Ocampo e eu mesma falamos das posibilidades que ofrece o portal do IGE para o seu uso nas clases de matemáticas e, en particular, da estatística. A xornada cerrouse coa intervención de Julio González Díaz, profesor do Departamento de Estatística e Investigación Operativa da USC. A súa ponencia levaba por título "Guerra e paz: optimización e teoría de xogos".

Á xornada de A Coruña asistiron 39 persoas e á xornada de Vigo 26 persoas.

Tendo en conta as enquisas de satisfacción que cubriron os asistentes cando rematou a xornada, podemos considerar que os resultados foron moi bos. Nas enquisas pedíase valorar de 0 a 5 o cumprimento dos obxectivos da xornada, os contidos, a metodoloxía e as condicións xerais. Tal e como se mostra na Imaxe 1 as medias son todas superiores a 4,4, co cal podemos afirmar que os obxectivos se acadaron, aínda que debemos ter en conta algunhas das queixas vertidas por algúns dos asistentes como foron: demasiados contidos para un só día, obradoiros demasiado apurados, ...



Imaxe 1: Resultados das enquisas de satisfacción
Fonte: AGAPEMA, SGAPEIO

No nome da SGAPEIO, quero darlle as grazas a AGAPEMA e á Fundación Barrié pola súa colaboración na organización desta xornada. Dende o punto de vista da nosa Sociedade, a experiencia foi moi positiva e enriquecedora, e esperamos que se poidan seguir mantendo colaboracións deste tipo no futuro.

ESTHER LÓPEZ VIZCAÍNO
Presidenta de SGAPEIO
<esther.lopez@ige.eu>

Léxico matemático galego en Secundaria

CIBRÁN M. ARXIBAI QUEIRUGA
PILA GARCÍA AGRA
SANDRA SAMBADE NIETO

Explícase o desenvolvemento da "Xornada de léxico matemático"e analízanse os diferentes aspectos que se desenvolveron. Trátase a situación do galego en secundaria en base aos datos dun cuestionario enviado ao profesorado.

Development "Day explains mathematical lexicon" and the different aspects that were developed are discussed. The situation of Galician secondary data based on a questionnaire sent to teachers concerned.

Os días 5 e 6 de novembro do 2013 celebráronse no Salón de Graos da Facultade de Matemáticas unhas "Xornadas de léxico matemático"nas que se fixeron varias presentacións: a rolda de léxico matemático [http://www.listas.usc.es/listas/lexi_ga_math.html], unha inicitiva sobre a terminoloxía matemática na Galipedia e do concurso de vídeos de 2 minutos "Explícoche matemáticas 2.0" que se amplía aos centros de secundaria no curso 13-14.

Nestas Xornadas tamén houbo un espazo para conferencias. Unha delas impartida por Xusto Rodríguez, do SNL da USC tratou sobre *"A problemática da fixación do léxico científico"* na que debullou as causas que empecen a fixación da terminoloxía en matemáticas: limitacións na difusión do léxico (fanse obras para filógos pero non para utentes, fontes escasas e inaccesibles), vacilación terminolóxica en obras de referencia, variación na lingua usual, interferencias co castelán, defensa do estándar reintegracionaista e inseguridade no uso da lingua.

Ernesto González Seoane, do ILG, disertou sobre *"O léxico científico nos dicionarios galegos"*, centrándose especialmente no estudo do dicionario da RAG, comparando as entradas etiquetadas como de matemáticas ou de xeometría coas de dicionarios noutras linguas. Resaltáronse algúns aspectos cos que se ataca o uso da terminoloxía científica en galego como poden ser as acusacións de que se empregan termos artificiais ou inventados (acaso a terminoloxía que usamos en inglés para a informática non é inventada?), que o uso do léxico en galego é moi dificultoso (cando só o 3 % dos termos son distintos dos do castelán) ou que a norma do galego cambia decote (cando isto é completamente falso).

O catálogo de achegas das Xornadas complétase cun par de mesas redondas. Nunha delas tratouse a cuestión do léxico matemático galego na universidade. As intervencións versaron sobre os *hoax* (historias falsas distribuídas por internet) e o papel fundamental que xoga o profesorado como factor determinante na normalización lingüística nesta etapa educativa.

A mesa redonda "O galego nas matemáticas elementais" foi na que participamos os que asinamos este artigo e imos intentar explicar máis polo miúdo os seus contidos. Para podermos falar non só a través da nosa propia experiencia, senón da de outros profesionais, elaborouse un cuestionario que grazas á colaboración de AGAPEMA foi enviado a todos os centros de secundaria.

Perfil do profesorado que respondeu o cuestionario

Obtivemos un total de 185 respostas cunha media de anos de experiencia docente de 20,52 ($\sigma = 9,15$). A porcentaxe de horas impartidas en galego sobre o total do horario de clases de matemáticas por este profesorado distribúese cunha media dun 48 %. Pero quizais o máis destacado é que o 40 % deste profesorado non imparte ningunha hora de matemáticas en galego e outro 40 % impárteas todas. O coeficiente de correlación de Pearson entre os anos de experiencia docente e a porcentaxe de horas impartidas en galego é de 0,44, o que nos indica unha tendencia ao abandono da docencia das matemáticas en galego ao ir diminuíndo os anos de experiencia.

Termos que xeran dúbidas

Nos parágrafos que seguen os termos recomendados son os que aparecen suliñados. Cunha ampla maioría o termo que máis dúbidas xera é *linear* (*lineal*) e os seus derivados. Un total de 13 persoas referiu dúbidas sobre o termo correcto. Da mesma raíz é *liña*, que tamén supuxo dúbida para 3 persoas.

O segundo termo que presentaba máis dúbidas foi *cuadrática* (*cadrática*). Moitas outras palabras utilizan este o mesmo prefixo: *cuadrangular*, *cuadrante*, *cuadratura*, *cuadraxésimo*, *cuadriculado*, *cuadrante*... En xeral os cultismos e as súas palabras derivadas serán aquelas que levan o prefixo *cua*. Palabras como *catro* ou *cadrado* son patrimoniais. Non sabemos as razóns, pero curiosamente a RAG admite *bicadrático*. Outra entrada do dicionario RAG sobre o que cumpriría máis debate é o termo *polinómico*, unha expresión exclusiva do español, polo que conviña considerar se non sería preferente o uso de *polinomial*.

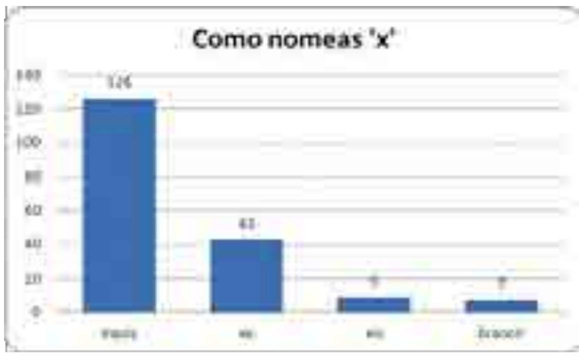
Un termo que queriamos destacar é o de *entorno* (dun punto). Había dúbida con *contorno* e *veciñanza*. Parece que ambas poden ser válidas, aínda que os seus usos normalmente son distintos: nunca diriamos *condicións de veciñanza*.

Tamén se propuxeron cuestións sobre os seguintes termos: *alxébrico* (face a *alxebraico*), *hipérbole* (*hipérbola*), *raio* (*radio*), *eixe-eixo*, *expoñente* (*exponente*), *feixe* (de rectas ou planos, nunca *haz* de rectas), *xerar*, *xeratriz* (*xeneratriz*), *expoñer* ou *formular* face a *prantexar*, que se considera un castelanismo; *exame*, *intererese* ou quizais *xuro* (por *interés*), *descontinuidade*, *quincuaxésimo*, sexaxesimal e *sexaxésimo* (coa pronuncia 'ks' no primeiro x), *función a anacos*, *limitar* (por *acotar* ou *acoutar*), *diferenza*, *terzo* (*tercio*), *ángulo raso* (por *ángulo llano*), *baleiro*, *devasa*, *termo*, *factorizar* (quizais por *fatorizar*?), *orde* (*orden*), *ao chou* ou *azar* son igualmente válidos, *intervalo*, *estatística*, *análise*, *transposta* (por *trasposta*), *grao* (*grado*), e *nesgo* (*sesgo*).

A denominación de x

Unha cuestión que pode esquecerse cando se trata do uso da terminoloxía é o seu emprego oral. O SNL da Facultade de Matemáticas lanzou no 2012 unha campaña co lema *"Chámalle xe"* co propósito de poñer de relevo esta cuestión.

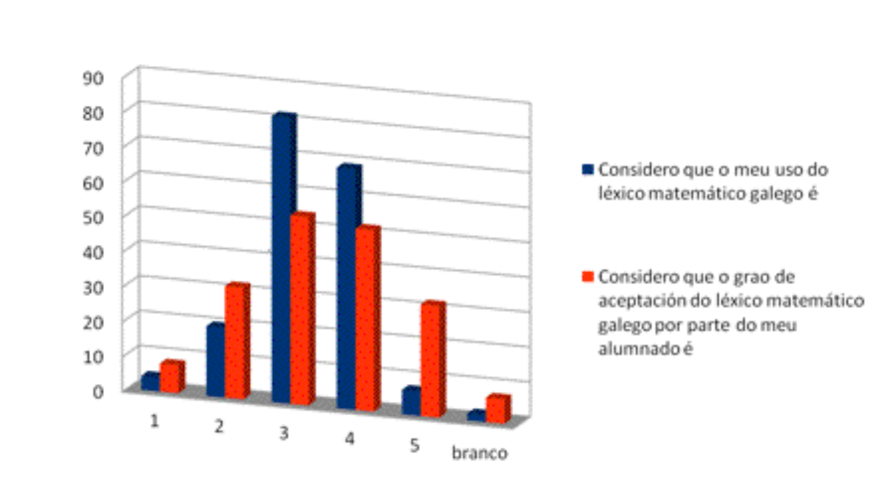
Cremos innecesario insisitir no uso que se fai nas aulas de matemáticas do "x", de aí a importancia do compromiso cun emprego correcto da súa denominación. Os resultados da enquisa quedan ben claros na Gráfica 1.



Gráfica 1: Denominación de 'x'.

Léxico matemático en galego nas aulas de secundaria

Preguntouse polo uso do léxico matemático por parte do profesorado así como polo grao de aceptación percibido polo alumnado. Para responder pedíase facer unha valoración de 1 (moi malo/nula aceptación) a 5 (moi bo/total aceptación). Os valores medios das respostas foron 3,30 e 3,38 respectivamente, e intentando cuestionar a existencia dalgunha correlación entre estes dous aspectos obtivemos un coeficiente de correlación de Pearson ρ= 0,30.



Gráfica 2: Léxico matemático nas aulas.

Fontes de consulta terminolóxica

Normalmente non é única a fonte sobre a que o profesorado recolle información sobre a denominación correcta dos termos matemáticas. Con gran diferenza os recursos preferidos son os dicionarios de uso xeral (125 respostas así o indican) e os libros de texto (con 98 escollas). Na metade dos casos consultan a outros profesores (65) ou usan dicionarios terminolóxicos (48). Só 10 declaran consultar a Galipedia e 5 os tradutores en liña.

Prexuízos

Aínda que o cuestionario se centraba nos puntos arredor dos que xiraban as *Xornadas* (dificultades para o uso do léxico galego, a súa aceptación, interferencias do léxico castelán, iniciativas para a normalización e fixación do léxico), moitas das respostas puxeron de relevo que a maior dificultade para o avance no uso e fixación do léxico matemático galego é o *Decreto 79/2010, do 20 de maio, para o plurilingüismo no ensino non universitario de Galicia*. En relación con isto, algúns comentarios evidenciaban como, xunto a prexuízos anteriores, foron creados outros novos, que fan que o imaxinario colectivo exclúa as matemáticas do uso do galego. Como exemplo disto, hai quen cuestiona mesmo o envío do cuestionario, pois fundamentan as súas crenzas en que o uso do galego na materia de matemáticas está completamente prohibido.

Ao facermos unha análise cualitativa dalgunhas achegas atopamos varios tipos de prexuízos relacionados co tema que nos ocupa. Un deles podería cualificarse como o do argumento da autoridade inverso. Quen dirixe as clases é o profesor, pola contra, cando se trata da fixación do léxico xorden razoamentos que utilizan o alumnado como factor para xustificar as incorreccións:

> *"o alumnado, en xeral, non acepta moitos dos termos galegos, co cal os profesores, polo menos eu, acabamos utilizando termos castelanizados"*

> *"[os alumnos] levan mellor o de 'equis' que o de 'xe'"*

Tamén se atoparon valoracións do galego como lingua reservada para funcións non cultas. A pesar de termos unha norma ben establecida e unha historia documentada de produción escrita secular, seguen a reproducirse prexuízos sobre o *status* do galego, mesmo para o seu uso en ámbitos máis especializados como é a clase de matemáticas. Así recolléronse xustificacións tales como:

> *"o meu galego non é de estudo [...] non teño dominio das expresións matemáticas en galego académico [...] o uso do léxico matemático dificulta a marcha da clase"*

Conviña pararse a pensar se o profesor de lingua é da mesma opinión. Está claro que este tipo de ideas parten dunha concepción da educación en compartimentos estancos, incluso en compartimentos incompatibles. A isto hai que sumarlle estimacións propias do racismo lingüístico, ou tal e como se sinalaba doutra das respostas: *"o problema de fondo é que o galego ten unha consideración de lingua de uso, non de lingua de cultura"*. Deste xeito tomaríase o galego como unha fala subordinada doutra e non como lingua con todas as funcións e capacidades. Velaí que hai quen aconsella *"que ás veces é mellor utilizar termos en castelán para ter unha mellor aceptación por parte dos alumnos"*.

Resulta realmente significativo que ninguén faga referencia á terminoloxía en portugués, por seren as dúas linguas actuais descendentes do galego-portugués medieval, polo tanto, linguas irmáns, pola contra hai quen comenta que *"no caso de dúbida utilizo o vocabulario castelán"*. Velaí que a escolla xa non se fai inconscientemente pola presión ambiental do castelán, senón que se asume de forma plenamente consciente e natural.

Propostas

Para abordar a problemática comentada nas liñas anteriores solicitáronse propostas para a mellora do uso e da calidade do léxico matemático en galego. Comentamos algunhas delas.

- *Dicionario de léxico matemático en galego*. Hai varios, quizais o problema estea en que o colectivo de docentes de matemáticas non ten información sobre ese material. Unha proposta refería a idea de enviar estes dicionarios por correo electrónico ao profesorado.

  Con todo, cando xorden dúbidas normalmente os docentes acoden a dicionarios de uso xeral. Na rolda de léxico matemático estase a traballar para mellorar a terminoloxía do dicionario en liña da RAG.

- *Un manual cos termos máis usados*. Engadiriamos: e cos termos máis dubidosos.

- *Aplicacións informáticas en galego*. Hai 60 UD en galego no programa EDAD do Proxecto Descartes [http://proyectodescartes.org/EDAD/mat_galego.htm].

- *Carteis cunha terminoloxía básica para ter colgados na clase.*

- *Vídeos en galego*. O concurso "Explícoche matemáticas 2.0" vai nesa liña.

- *Programa de divulgación matemática na TVG*. De poñerse en marcha sería unha moi boa proposta. Lembramos os excelentes documentais de Antonio Pérez Sanz na TVE. En TV3 emitiron no ano 2008 "*Àlia*", un programa divulgativo de matemáticas con materiais para a aula. [http://www.tv3.cat/programa/12405/Alia].

- *Publicación de textos en galego*. Posiblemente esta sexa a mellor forma de fixar e normalizar o uso correcto do léxico específico. Outro dos danos colaterais do *Decreto 79/2010, do 20 de maio, para o plurilingüismo no ensino non universitario de Galicia*, que freou en seco a edición de textos de matemáticas, é a da contribución ao descoñecemento e deturpación do léxico específico das matemáticas na nosa lingua.

CIBRÁN M. ARXIBAI QUEIRUGA
IES Pintor Colmeiro - Silleda
<carxibai@edu.xunta.es>
@cartaxeometrica

PILA GARCÍA AGRA
IES Nº 1 - Ordes
<pilag@edu.xunta.es>

SANDRA SAMBADE NIETO
IES Monte da Vila - O Grove
<ssambade@edu.xunta.es>
@ssambade

Seminario Federal:
O papel das avaliacións na Educación Matemática

MARISOL PÉREZ BLANCO

A FESPM considerou oportuna a organización dun Seminario sobre *"El papel de las evaluaciones en la Educación Matemática"*, que aborde a análise e a reflexión sobre a función que a reforma educativa proposta polo Ministerio de educación, Cultura e Deporte concede ás sucesivas avaliacións en Educación Primaria, Secundaria e Bacharelato, e a súa relevancia no ensino e aprendizaxe das matemáticas. Pretende con este Seminario elaborar un documento que poida reflectir as opinións que os membros da FESPM sosteñen a este respecto, así como as recomendacións que se deban formular tanto ás Administracións Educativas como ao profesorado e a outros estamentos sociais involucrados na educación.
O seminario, que tivo lugar en Castro Urdiales, do 7 ao 10 de marzo de 2013 iniciouse cunha conferencia de Luis Rico Romero, co título: *"Cambio curricular y aprendizaje de las matemáticas escolares: evaluación en la Educación Obligatoria."*
Reparte a súa exposición en dúas partes:

I **Contexto do cambio curricular**: as competencias e a súa avaliación nun marco de cambio educativo.

II **Tarefas** para desenvolver e avaliar competencias matemáticas.

Continuamos cunha mesa redonda: *"¿Por qué, para qué y qué evaluamos?"* na que contamos coa intervención de Juan A. Trevejo, Ismael Sanz e un representante do Instituto Nacional de Avaliación Educativa na que se puxeron de manifesto opinións sobre as diferentes avaliacións nacionais e internacionais.

Rematamos as sesións comúns coa conferencia de Elena Ramírez *"Pruebas Nacionales e Internacionales ¿Y esto sirve para algo?"*, na que fai un repaso das diferentes probas nacionais e internacionais.

Elena especifica a quen vai dirixida cada proba e que coñecementos mide cada unha. Fai unha análise dos resultados facendo unha comparativa cos países do noso entorno. Detense tamén na proba diagnóstica realizada ao alumnado de Navarra e A Rioxa. Por último, fai un repaso da opinión, sobre as probas, do profesorado, o alumando, os pais e os equipos directivos.

As sesións do Seminario repartíronse en tres grupos de traballo, previamente establecidos, cada un dos cales aportou ao remate do seminario as súas conclusións coas que se fará un comunicado por parte da Federación. Os grupos de traballo foron os seguintes: Avaliacións nacionais e internacionais, A LOMCE e o novo marco legal e A mellora do profesorado e dos centros educativos.

Avaliacións nacionais e internacionais

Respecto ás avaliacións internacionais, existe un descoñecemento real e profundo sobre as probas tanto por parte do profesorado como da sociedade en xeral, aínda que recoñecemos o esforzo do INEE e outros organismos na súa difusión. Cremos que a FESPM debería intervir na interpretación dos resultados das probas que sexan divulgados, así como que a información sobre as probas debe ser máis asequible e concisa, coidando as explicacións que se transmiten, tratando de resaltar tanto os aspectos positivos como negativos das mesmas. Recordemos que os resultados das competencias son responsabilidades de todas as áreas e todos os axentes educativos.

Imaxe 1: Grupo de traballo

A avaliación de diagnóstico está prevista pola LOE ao finalizar o segundo ciclo de E. Primaria e segundo de ESO para todos os centros sobre as competencias básicas acadadas polo seu alumando. Son importantes e necesarias para ter datos que permitan a análise e o contraste coas observacións que xa temos co fin de mellorar. Non obstante nin a mellor proba competencial pode abarcar todos os aspectos das competencias matemáticas polo que a análise dos seus resultados debe complementarse con outros derivados da práctica diaria da aula. Consideramos adecuadas as probas en 4º e 2º de ESO e sería interesante en 6º e 4º de ESO, porén a súa aplicación non debería ser anual, xa que o abuso destas probas non permite o efecto de mellora pretendido e nunca deben utilizarse para medir o alumando senón o propio sistema educativo.

Parece recomendable unha serie de Boas prácticas:

Preparación das probas: deben ser elaboradas por profesorado especialista na materia e etapa; debe admitir todo tipo de preguntas, tanto test como abertas e mixtas; deben ser interesantes para o alumando e abarcar o máximo número de aspectos competenciais matemáticos e doutro tipo.

Desenvolvemento das probas: deberíanse normalizar e considerar como un instrumento máis de axuda na aprendizaxe, evitar a súa realización nun período curto de tempo e nunca no mesmo día e convén que o profesorado que as aplique non sexa do propio grupo.

Corrección das probas: deberían ser externos e especialistas na materia, así como ter claros os criterios de corrección previamente establecidos.

Análise dos resultados: débense analizar e tomar en consideración os resultados. Os centros deben dispor das probas realizadas polo seu alumando o máis axiña posible para incorporalas como referente nas decisión posteriores.

Difusión dos resultados: a difusión debe coidarse ao máximo tanto nos medios de comunicación como nos sectores educativos, evitando a clasificación dos centros. A información ás familias debe ser feita polo titor coidando a linguaxe xa que ás veces unha linguaxe técnica non é realmente comprensible para as famlias.

Consecuencias para o traballo na aula: o resultado permite establecer aspectos a mellorar na programación didáctica aínda que sempre condiciona o traballo na aula. É importante traballar por tarefas na aula para evitar que as matemáticas se convertan nunha actividade de reprodución.

Por qué non deben utilizarse para obter unha titulación: o profesorado é o único responsable da avaliación e é importante diferenciar o rendemento académico dos resultados das avaliación de competencias. Estamos de acordo nunha proba final de avaliación de competencias para completar e enriquecer a información existente nos centros sobre a consecución de competencias básicas, pero a proba é moi limitada e non debe por iso determinar a titulación dunha etapa educativa

Que facer cos resultados?: Explicalos correctamente cando se divulgan e utilizalos para a toma de decisións de mellora.

Consideramos que a lexislación educativa debe ser estable e require un gran pacto político.

A LOMCE e o novo marco legal

Consideracións xerais: A nova lei non busca o consenso, nin a opinión do profesorado, baséase nun modelo economicista e é un cambio lexislativo inxustificado, deixa ao arbitrio das administracións educativas autonómicas a atención á diversidade.

Imaxe 2: Grupo de traballo

Reflexo curricular: propón unha simplificación do currículo; haberá que romper coa rixidez dos horarios e habilitar mecanismos de flexibilización; traballar con grupos de vinte e cinco alumnos tamén dificulta o traballo por competencias; o traballo de coordinación entre etapas parece esencial; os libros de texto, opción maioritariamente seguido polos docentes, deberan pasar un filtro homologador para que reflicta adecuadamente o traballo e a avaliación por competencias; debería ter un tronco común que facilite a permeabilidade entre opcións, das que se fala no anteproxecto. Inténtase asignar ás matemáticas un papel de ferramenta excluínte. Debe traballarse desde todas as áreas a competencia matemática, e debe dotarse ao sistema educativo dun plan de uso das novas tecnoloxías que inclúa un programa de formación efectivo.

Avaliacións externas: está de acordo o grupo coa necesidade de avaliar, pero os datos destas avaliación teñen que ser útiles para profesorado e centros, parece que se considere ao profesorado meros actores secundarios na titulación do alumnado; anúlase o potencial da avaliación continua, co risco de considerar a práctica docente practicamente encamiñada á superación destas probas. O logro da homoxeneización debe basearse na implantación do currículo e non nas probas. Se se pretende unha avaliación por competencias, a proba deberá ser certificadora neste sentido, o que non se consegue cunha proba escrita. Os resultados negativos das probas non deben repercutir só no profesorado nin no centro senón que se require unha asunción colectiva de responsabilidades. A publicación de resultados non pode traducirse nunha simple apreciación cuantitativa sen o compoñente cualitativo. As probas tal e como están concibidas resultan caras e complexas, pódese xerar un problema de competencias coas autonomías e debería darse ás probas diagnósticas a importancia que teñen.

A mellora do profesorado e dos centros educativos

Todo proceso de avaliación implica un coñecemento da situación actual na que nos atopamos co ánimo de tomar decisións que permitan avanzar e mellorar. Neste proceso de mellora da Educación Matemática deben participar os centros educativos e o profesorado, e neste Seminario cuestionámonos cales son os factores que afectan á súa mellora e fixemos algunhas propostas que poden contribuír a avanzar neste sentido. Entendemos que a mellora dos centros educativos e do profesorado forma parte da evolución lóxica da carreira docente.
O proceso de profesionalización do profesorado conduce a facilitar e mellorar a actividade dos centros e finalmente a un aumento da calidade educativa do alumnado.

Imaxe 3: Grupo de traballo

No que ao profesorado atinxe, propoñemos unha sólida formación inicial e continua, reorganizar os centros para aumentar a súa eficacia, afondar na cultura da avaliación e valorar o traballo docente tanto por parte da administración como da sociedade. Todos estes elementos redundarán na consideración dos centros como verdadeiras organizacións que aprenden.

Da formación inicial e continua

Pensamos que a formación inicial do profesorado, entendendo por isto o conxunto de coñecementos, habilidades, prácticas e procesos que debe coñecer o profesorado no seu primeiro contacto con esta actividade, é fundamental para un desenvolvemento adecuado do profesor/a como profesional. Por isto opinamos que se lle debe dar unha maior importancia a este primeiro contacto e á súa titorización. Darlle protagonismo á formación inicial e ao primeiro ano do profesorado novel pasa por organizar un plan de acollida, de titorización e acompañamento, para o que se necesita focalizar a atención na elección do titor/a, mellorando o seu recoñecemento, permitindo compartir docencia nun grupo durante todo o curso escolar, compartindo a programación, liberando a ambos de parte do seu horario docente para poderlle dedicar tempo á formación, compensando este traballo do titor cun recoñecemento a nivel profesional. Estas consideracións deberían terse en conta en igual medida na realización do Prácticum do Máster de Secundaria e a elección do Titor do Centro onde se van realizar ditas prácticas. Respecto á formación continua do profesorado, pasa pola mellora da formación en avaliación por competencias xa que o cambio de paradigma esixe unha formación específica, toda formación debería estar contemplada dentro do horario escolar, fomentada polo coordinador de formación do centro. Impulsar e fomentar a creación de grupos de traballo de diferentes disciplinas xa que a avaliación por competencias atinxe a todas as áreas por igual.

Organización do centro

Propoñemos potenciar a figura do coordinador pedagóxico co fin de que lidere a coordinación entre departamentos, e que dinamice o PEC. Así mesmo, facilitará propostas globais que materialicen o traballo por competencias e manterá as redes de comunicación e transmisión de información. O coordinador pedagóxico debe ser aquel membro da Comisión de Coordinación Pedagóxica que actúe como correa de transmisión entre os diferentes Departamentos e coordine en todo o centro os aspectos pedagóxicos. Entre as súas tarefas debería prestar especial atención a participar nas redes de comunicación, coidando a transmisión da información e a comunicación de cara ao exterior das iniciativas que se levan a cabo no centro. Crearanse e facilitaranse dinámicas de contacto entre o profesorado fóra de situacións académicas e entre profesorado e o alumnado co fin de mellorar o clima do centro e favorecer a creación de grupos de traballo desde diferentes disciplinas. Os RRI deben ser realizados mediante consenso para facilitar a implicación de todos/as. Cremos necesaria a existencia dun liderazgo que dinamice e busque o compromiso do profesorado, que fomente actividades de centro, interdisciplinares e entre centros da mesma zona.

Se queremos traballar por competencias, debemos facer propostas globais que impliquen á maior parte do profesorado, se non a todos e que trate temas transversais. O desenvolvemento das actividades e tarefas non estritamente académicas favorecen a creación de lazos entre o alumnado tendo gran relevancia a pertenza “ao seu centro escolar”. As actividades ricas competencialmente ou os proxectos que permitan a intervención do maior número de departamentos enriquecen a vida escolar. A administración debe facilitar a creación de grupos de traballo buscando as condicións ideais de horario e temáticas, ao mesmo tempo que tratará de consolidar os xa existentes. Propoñemos que a administración educativa teña en conta o desenvolvemento de proxectos educativos a cargo de equipos de traballo onde os haxa, co ánimo de que un centro educativo poida contribuír ao desenvolvemento do Proxecto Educativo dende unha perspectiva coherente, e que facilite a consolidación destes equipos nun determinado centro. A coordinación lonxitudinal en primaria, primaria e secundaria e ao longo de toda a secundaria favorece a creación de relacións positivas entre o profesorado.

A avaliación no centro

A avaliación debería ser o eixe central arredor do que debería xirar a actividade cotiá dos Centros Educativos. O proceso de avaliación implica valoración do que se fai, cómo e por qué se fai, para tomar decisións que permitan mellorar aqueles procesos que se detectan defectuosos ou mellorables. Pero dita avaliación deberíase incorporar aos procesos habituais de funcionamento do Centro Educativo para avanzar no coñecemento da organización e mellora dos resultados. Este proceso de avaliación debería afectar a todos aqueles aspectos e axentes que interveñen na actividade diaria do centro. Consideraremos a avaliación como parte da educación conseguindo incorporala á cultura diaria. O centro mellora se a cultura avaliativa do centro mellora: do alumnado, do profesorado, da xestión do centro, dos procesos educativos. Non confundir avaliación con cualificación permitiranos avaliar tamén os nosos logros, para introducir as melloras necesarias. Debemos formarnos adecuadamente para asumir a avaliación como un elemento de axuda, utilizando a autoavaliación, considerando ademais diversidade de ferramentas. Mellorar a comunicación do centro coas familias como parte da cultura da avaliación, facer bo uso dos resultados das avaliacións tanto internas como externas para que contribúan a mellorar aqueles aspectos nos que sexa necesario. Parece necesario facer chegar dende as administracións propostas concretas de mellora en función das necesidades de cada centro, contar coa opinión do profesorado que é o directamente implicado na aplicación de medidas de mellora.

Dende a Administración

O proceso de mellora do profesorado e dos Centros Educativos non pode levarse a cabo sen que a Administración Educativa facilite os medios necesarios para que se poidan aplicar aqueles procesos que permitan mellorar. Pero ditos medios non deben estar restrinxidos unicamente a medios materiais e persoais, que sen dúbida permiten mellorar na medida na que se ten maior dispoñibilidade deles, senón que tamén debe velar por aqueles medios intanxibles que permiten que a tarefa docente se desenvolva enfocada cara á profesionalización docente.

A administración debe velar pola consideración social do docente dando protagonismo ao profesorado, contando coa súa opinión e recoñecendo o valor da tarefa docente, pasando por todos os niveis educativos, dende a educación infantil ata o bacharelato. A mellora da imaxe pública pasa polo recoñecemento do labor docente por parte das familias e do alumnado como unha das tarefas fundamentais na formación de persoas. A mellora da imaxe pública pasa polo recoñecemento do labor docente por parte das familias e do alumnado como unha das tarefas fundamentais na formación de persoas.

Buscar a profesionalización docente, para o que se fai necesario tomar decisións que impliquen que o profesorado poida ser un verdadeiro axente social, planificador e xestor da ensinanza e da aprendizaxe. Esta profesionalización docente pasa non soamente pola formación, senón tamén por aquelas condicións laborais que permitan ao profesorado asumir responsabilidades, ter capacidade de planificación e de decisión, expectativas de promoción e mellora profesional e económica.

MARISOL PÉREZ BLANCO
Vicepresidenta de AGAPEMA
<mpb@edu.xunta.es>

Seminario Federal:
As competencias básicas agora

SANDRA SAMBADE NIETO

O Seminario que reuniu a unha treintena de representantes de diversas comunidades autónomas en Segovia, do 14 ao 16 de marzo de 2014, foi convocado pola Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) e organizado conxuntamente coa Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán".
O seminario levaba por título *"Las competencias básicas ahora"* e nel pretendíase analizar o grao de consecución do traballo por competencias nas aulas logo de sete anos de LOE.
Tanto o venres como o sábado, o seminario tivo a mesma estrutura: unha conferencia e dúas sesións de traballo (unha pola mañá e outra pola tarde), deixando unha última sesión de posta en común das conclusións para o domingo.
Para a organización das sesións de traballo os participantes dividímonos en tres grupos, de forma que cada un tiña unha cuestión para analizar. Aínda que cada grupo tiña un cometido distinto, foi case imposible non abordar parte do traballo dos grupos restantes, posto que estaban moi relacionados.

Comezamos o venres coa conferencia titulada *"Integración Curricular de las CCBB. Recorrido de la competencia matemática en el currículo"*, que correu a cargo de Elena González Briones e Estrella López Aguilar, ambas membros do Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa (CNIIE).

A conferencia do sábado, titulada *"La competencia matemática desde las investigaciones matemáticas. Orientaciones y ejemplos para ESO y Bachillerato"*, foi impartida polo compañeiro da Sociedade "Miguel de Guzmán", Constantino de la Fuente. Nesta conferencia amosounos como leva a cabo investigacións con alumnos como medio para desenvolver a competencia matemática.

Os tres grupos de traballo que se crearon foron os seguintes:

- Grupo I: *¿Qué cambios ha supuesto el trabajo por competencias?*, coordinado por Xavier Vilella.
- Grupo II: *Formación docente sobre competencias*, coordinado por José Luis Lupiáñez.
- Grupo III: *Competencia matemática y las otras competencias. Conexiones*, coordinado por Carmen Espeso.

Nos seguintes apartados resumimos a análise feita nos grupos de traballo e parte das conclusións ás que chegamos.

Que cambios supuxo o traballo por competencias?

A primeira conclusión que obtivemos é que o primeiro escalón xa se superou, aínda que non en todas as comunidades do mesmo xeito nin á mesma velocidade. Puidemos comprobar como en Cataluña, por exemplo, o documento de competencias matemáticas está axudando moito a cambiar a mentalidade do profesorado e contribúe a mellorar o labor docente (outros documentos relacionados con competencias aquí). Xa son unha realidade experiencias de éxito en centros que traballan por proxectos, e cada vez máis os centros están adoptando esta proposta didáctica. "Traballo por Tarefas"e "Boas prácticas"son expresións que constatan o traballo por competencias noutras comunidades autónomas.

Porén, hai que recoñecer dunha maneira obxectiva que queda moito camiño por percorrer e que a maioría de centros educativos españois continúan traballando as matemáticas dunha maneira clásica: libro de texto, explicacións maxistrais, exercicios, corrección na pizarra, exames de contidos e nota sancionadora.

Unha análise da situación actual levounos a formularnos as dificultades que existen á hora de facer este cambio e, polo tanto, decidimos enderezar a pregunta inicial e reflexionar sobre os cambios que hai que facer para que se consolide o traballo por competencias básicas (CB a partir de agora).

Que cambios se necesitan para mellorar o traballo en competencias?

Cambios na formación do profesorado

- Hai unha mellora na preparación inicial tanto na Facultade de Maxisterio como no Máster de Secundaria. Esta formación debería estar impartida por profesorado con experiencia docente no traballo por CB.
- Habería que garantizar que os centros onde hai profesorado facendo prácticas (tanto de primaria como do máster de secundaria) sexan centros contrastados nos que se traballe por CB. Hai que evitar que o profesorado que non traballa dunha maneira competencial e que incluso está en contra, estea formando ao futuro profesorado. É absurdo formar a un profesorado que despois haberá que volver formar.
- A formación do profesorado en activo, a formación continuada, hai que facela nos centros docentes, con prácticas nas aulas promocionando a presenza do profesorado formador dentro das clases dos centros receptores de formación.

Cambios no liderado

- A administración educativa debería apoiar as propostas innovadoras que xurden do profesorado. No caso de que algún centro opte por utilizar libros de texto, é necesario que a administración garantice que os textos recollan os elementos esenciais do traballo por CB.
- Os equipos directivos deben exercer un liderado pedagóxico cun proxecto claro e favorable ao traballo en CB. Deben facilitar e promocionar a colaboración entre áreas para traballar conxuntamente as CB.
- Os apoios externos que interveñen nos centros (inspección, formación, unidades de programas, equipos de orientación, ...) deberían asegurar que os centros conozan e compartan as experiencias relacionadas co traballo competencial.

Cambios na tarefa docente

- A tarefa docente debe facer un cambio integral. Non nos serve cambiar a xestión da aula se continuamos avaliando igual, ou cambiar a avaliación se se fai a clase de maneira tradicional. O cambio da tarefa docente débese realizar nos tres eixes vertebrais fundamentais:
    - ▹ **O contexto**. Debe ser o núcleo principal das unidades didácticas, un contexto que dunha forma natural facilite a interdisciplinariedade e o traballo de todas as CB, así como un axuste ás necesidades educativas de cada individuo.
    - ▹ **Xestión da aula**. O alumnado debe ter o protagonismo, debe ser quen faga a súa propia investigación e que profundice na súa propia aprendizaxe partindo dos seus propios coñecementos e avanzando segundo as súas propias capacidades. O traballo en grupos cooperativos é un exemplo que se axusta a este modelo de xestión.
    - ▹ **Avaliación**. Hai que entender a avaliación como unha ferramenta de aprendizaxe integrada dentro da propia aprendizaxe. Debe ser coherente co traballo no contexto, por competencias e coa xestión da aula. A avaliación debe ter unha dobre funcionalidade, axudar ao alumnado a desenvolver a súa propia aprendizaxe e axudar ao profesorado a modular as actividades de aula co fin de optimizar a productividade. A avaliación nunca debe ter unha función sancionadora senón educativa e, polo tanto, debe axustarse adecuadamente ás necesidades educativas de cada individuo, sexan as que sexan.

Conclusións

Aínda que damos por feito que houbo cambios nos últimos anos que fomentan unha mellora no proceso de aprendizaxe do alumnado e do ensino das matemáticas en particular, tamén é certo que se ven aínda moitas reticencias e sobre todo moitas diferenzas de visión e de criterio.

Hai que evitar a tendencia a repartirse as competencias coa excusa de facilitar a súa avaliación. As competencias deben servir para compartir experiencias, contidos, actividades e reflexións entre as materias. A avaliación non debe ser un obstáculo para traballar as competencias senón unha ferramenta de aprendizaxe máis para compartir.

SANDRA SAMBADE NIETO
Vogal de AGAPEMA
<ssambade@edu.xunta.es>

XXV Aniversario da FESPM (1988-2013)

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA

O día 16 de novembro de 2013 tivo lugar en Sevilla a conmemoración do XXV aniversario da fundación da FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), fundación que xa tivera lugar na capital andaluza. O acto celebrouse no Parlamento de Andalucía e nel estiveron representadas polos seus presidentes todas as sociedades federadas que compoñen a FESPM. Tamén asistiron persoas que ocuparon cargos de relevancia na federación ao longo destes 25 anos, así como socios e socias de diferentes sociedades federadas.
A inauguración do acto correspondeu ao Presidente do Parlamento de Andalucía, D. Manuel Gracia Navarro, acompañado na mesa polo presidente da FESPM, D. Onofre Monzó del Olmo, e o presidente da Sociedade Andaluza de Educación Matemática "Thales", D. Sixto Romero.

Momento da inauguración.

Posteriormente o profesor da universidade de Granada, D. Rafael Pérez Gómez, impartiu a conferencia “A promesa pitagórica”, na que, partindo dos principios da escola pitagórica, do seu gusto e interese polo estudo do mundo, pola comprensión dos fenómenos naturais, o coñecemento e a súa divulgación, falou da importancia do ensino das Matemáticas e do ensino en xeral. En particular fixo unha firme aposta polo ensino público, maltratado polas administracións nestes tempos de recortes indiscriminados, como elemento de igualdade e de acceso á formación e o coñecemento para todos os cidadáns. A conferencia rematou cunha torta de aniversario con 25 velas que foron apagadas conxuntamente polos presidentes das sociedades federadas, e posteriormente os asistentes, seguindo o exemplo de Pitágoras, reafirmaron o seu compromiso co ensino das Matemáticas a modo de xuramento.

O acto proseguiu cunha intervención de D. Serapio García Cuesta, anterior presidente da federación, que fixo un percorrido polos 25 anos da institución, lembrando as principais actividades realizadas (JAEM, seminarios federais, cursos de formación, a revista SUMA) e ás persoas que tiveron as contribucións máis salientables para que a FESPM chegase a se converter no que é hoxe: unha das institucións máis importantes do estado dentro das relacionadas co ensino e co profesorado.

Seguidamente tivo lugar unha mesa redonda na que, baixo o título “Ante outros 25 anos”, os participantes analizaron os principais obxectivos e retos de futuro aos que se enfronta a federación de cara aos vindeiros anos.

Conferencia a cargo de D. Rafael Pérez Gómez.

Torta de aniversario.

Na mesa redonda interviñeron D. Luis Balbuena Castellano (quen ocupou os cargos de presidente da sociedade Isaac Newton e de secretario xeral da FESPM), D. Florencio Villarroya Bullido (quen foi presidente da FESPM) e D. Josep Lluís Pol i Llompart (presidente da Sociedade Balear do Profesorado de Matemáticas XEIX). Os tres coincidiron, cada un dende a súa perspectiva, na necesidade de acadar un aumento da participación do profesorado das diferentes etapas, principalmente das iniciais, nas actividades da federación. Outro obxectivo prioritario para a federación e para cada unha das sociedades federadas será o de mellorar as relacións coas administracións educativas, procurando que as nosas propostas sexan tidas en conta en temas que afecten directamente ao ensino das Matemáticas, como elaboración de currículums, plans de formación, homologación de actividades, etc. O acto conmemorativo rematou cunha visita guiada ao Parlamento de Andalucía.

Como colofón a esta festa de XXV aniversario da federación, tivo lugar unha xunta de goberno da FESPM na que se aprobou, entre outras cousas, a incorporación á federación da sociedade EMIE 20+11 de Euskadi, circunstancia que supón que todas as autonomías do estado contan xa cunha representación na federación.

JULIO RODRÍGUEZ TABOADA
Presidente de AGAPEMA
<juliotab@edu.xunta.es>

IN MEMORIAM

gamma

Á nosa amiga Cova

TERESA OTERO SUÁREZ
ALICIA PEDREIRA MENGOTTI

In memoriam

Covadonga Blanco García

Coñecémola nunha sesión de pregadura en Santiago, deseguida nos fixemos amigas, pois iamos na procura do mesmo obxectivo, "utilizar a papiroflexia no ensino das Matemáticas".

Ese mesmo ano viaxamos á convención de Zamora xuntas, e empezámonos a formar. Por internet descubrimos o *Centro Diffusione Origami*, "a asociación italiana de origami"na que se atopaba un grupo de matemáticos cos mesmos intereses ca nós. Decidimos facernos socias e asistir a todos os congresos anuais.

A partir dese momento pareceunos interesante compartir cos demais as posibilidades desta arte milenaria no ensino das Matemáticas. Convertémonos nun auténtico triángulo equilátero. Cada unha de nós achegaba unha parte do traballo, e sempre viaxabamos xuntas 3 ou 4 veces ao ano para dar talleres ou comunicacións, intentando investigar figuras novas que fosen atractivas e que, ao mesmo tempo, servisen aos ensinantes para facer máis amena a materia.

Durante todos estes anos, definiriamos á nosa querida Cova como unha persoa intelixente, amena, servizal, alegre, desprendida, cariñosa, gran conversadora, e sempre, sempre, cun papel na man, e varios nos petos, facendo unha dobra, logo outra e outra. Os seus delicados dedos ían e viñan con precisión, moldeando o material que, tras un último axuste, cobraba vida transformándose nunha flor, un teselado ou un poliedro, para non perder un minuto do seu tempo, sempre pregando, no tren, no avión, no autobús, esperando a que nos servisen a comida, etc, etc,...

Viámola unha persoa fráxil como un barquiño de papel no medio do océano, pero ao mesmo tempo forte, valente, loitadora e con moita enerxía á hora de transmitir o interesante que é esta arte, sempre contenta, sempre feliz, sempre tiña unha palabra de ánimo para todos.

Hoxe o paxaro rebuldeiro, a pomba, a ra, o pingüín, o canciño, a paxariña, os sólidos platónicos, a xeometría e todos, todos nós, choramos a súa marcha.

A ti, grúa de papel, que voas polo ceo, envíalle a nosa mensaxe:

"Precisamos de ti, Cova!!! Grazas por coñecerte, esteas onde esteas, enviámosche un abrazo moi forte"

As túas amigas e compañeiras de Matemáticas.

(a) Covadonga.

(b) Covadonga con Silvana Mamino, Alicia e Teresa.

ASOCIACIÓN GALEGA DO PROFESORADO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nome e apelidos.. NIF......................................

Enderezo... Localidade......................................

Concello... CP..

Correo electrónico...

Teléfono.. Fax..

Datos profesionais:

Centro de destino...

Enderezo...

Concello.. CP......................... Provincia...............................

Correo electrónico...

Teléfono do centro.. Fax do centro...

Nivel no que ensina...

Materias que imparte...

Domiciliación bancaria:

Sr./Sra. Director/a do Banco/Caixa...

.... Sucursal.................................

Enderezo... Poboación...

Rógolle que ata novo aviso, aboen os recibos que envíe ao meu nome a ASOCIACIÓN GALEGA DO PROFESORADO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (AGAPEMA), con cargo a miña conta.

IBAN...

Nº Banco............... Nº Oficina.................... DC....... Nº Conta...

En.. a............ de.................................... de 20..........

Asdo..

Enviar a: AGAPEMA, CPI Dos Dices - Os Dices, s/n - 15911 Rois (A Coruña)

Cotas:

Asociados: 46 €(AGAPEMA 25 €+ FESPM 21 €)

Centros: 57 €(AGAPEMA 25 €+ FESPM 32 €)