gamma seccións Nº 13 Set 2014

Dúas pinceladas de GeoGebra cos polinomios na ESO

FERNANDO ZACARÍAS MACEIRAS
Grupo XeoDin

GeoGebra

Esta sección que se abre con este número, pretende achegar ás persoas lectoras as enormes posibilidades que GeoGebra, esta ferramenta informática extraordinaria, aporta á ensinanza das Matemáticas e outras ciencias, á pura investigación de propiedades, regularidades ou resultados diversos, e, ao desenvolvemento da competencia matemática. Aínda máis, aspira a contribuír a que o uso de GeoGebra se converta nun habitual da práctica docente diaria, e mesmo, a que o seu uso sexa incluído como contido curricular.

As dúas pinceladas ás que fai referencia o título, están relacionadas coa ensinanza e coñecemento dos polinomios na ESO. Unha, referida ao valor numérico tratado en segundo curso e outra, á descomposición factorial e simplificación de fraccións alxébricas en cuarto curso.

Como apéndice, inclúese un recordatorio sobre unha coñecida construción realizada con GeoGebra, tratada reiteradamente en cursos de formación e congresos: a transformación de funcións. Esta construción resulta de moita utilidade en cuarto para a explicación das funcións elementais, especialmente a de proporcionalidade inversa e a radical.

É importante sinalar que tanto o alumnado de segundo coma o de cuarto xa están iniciados no uso de GeoGebra e son capaces de seguir instrucións de construción sinxelas e de nivel medio.

1. Valor numérico dun polinomio no 2º curso da ESO

Nos libros de texto adoitamos ler:

> *"Cando nun polinomio as letras toman valores concretos, tamén o polinomio toma un valor concreto.*
> *Por exemplo, dado o polinomio $2x^3 - 6x^2 + 3x - 2$:*
>
> - *Para* $x = 2 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 16 - 24 + 6 - 2 = -4$
>   *O valor numérico para $x = 2$ é -4.*
> - *Para* $x = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$
>   *O valor numérico para $x = 0$ é -2.*
> - *Para* $x = -1 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = -2 - 6 - 3 - 2 = -13$
>   *O valor numérico para $x = -1$ é -13.*
>
> *Observa que o valor numérico dun polinomio depende do valor que tomen as letras."*

Pero estes polinomios, expresións de letras e números, á parte de ser moi útiles, teñen algunha outra forma de coñecerse? Hai maneiras de velos nalgún sitio? Teñen significado xeométrico? E o valor numérico, a que vén? Para que serve? De que nos informa?,...

Todas estas preguntas teñen respostas sorprendentes. Comecemos por repasar as coordenadas cartesianas e entender o que son e significan as coordenadas dos puntos.

Exercicio 1 (GeoGebra)

Cos eixes e a cuadrícula visibles,

a) Debuxa os puntos do plano $A = (1, 3)$, $B = (2, 0)$, $C = (-5, 1)$, $D = (6, -2)$, $E = (0, -3)$ e $F = (-4, -4)$. Fai que se vexan as súas coordenadas e indica nun cadro de texto o cuadrante no que está cada un. Algún problema?

b) Fixa os puntos anteriores para que non se movan accidentalmente.

c) Crea dous puntos $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{H}$ no segundo cuadrante; $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{L}$, no terceiro; $\boldsymbol{J}$, no primeiro e $\boldsymbol{M}$, no cuarto. Fai que se vexan os seus rótulos e dálles cores diferentes aos do apartado a), de xeito que os de cada cuadrante teñan unha cor diferente.

d) Crea dous puntos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ no EixeX e outros dous, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$, no EixeY.

e) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_coordenadas_01.ggb***.

Exercicio 2 (GeoGebra opcional)

Cos eixes e a cuadrícula visibles,

a) Debuxa un punto $\boldsymbol{A}$ no primeiro cuadrante. Ver rótulo con valor. Cor vermella.

b) Traza as perpendiculares aos eixes por $\boldsymbol{A}$.

c) Obtén os puntos de intersección $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, das perpendiculares cos respectivos eixes. Sen rótulo.

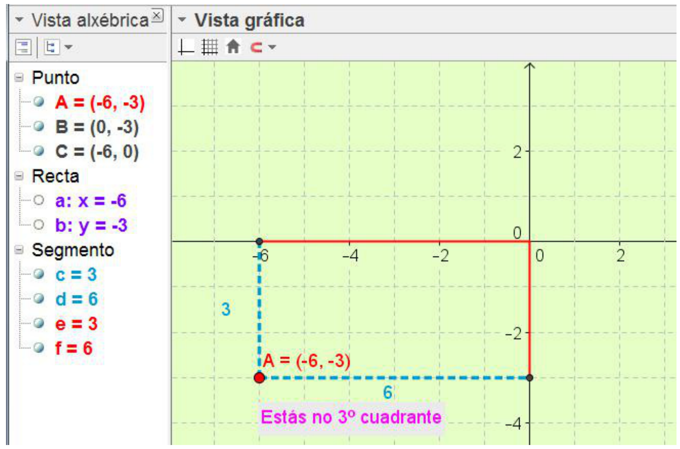
d) Crea os segmentos $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AC}$. Trazado descontinuo. Rótulo co valor. Color.

e) Debuxa o punto $D = (0, 0)$. Fíxao.

f) Crea os segmentos ***DB*** e ***DC***. Sen rótulos. Mesma cor que ***A***. Trazo continuo. Oculta ***D***.

g) Insire os nove textos seguintes (os que están en dúas liñas, fainos así):

   i) Estás no 1º cuadrante
   ii) Estás no 2º cuadrante
   iii) Estás no 3º cuadrante
   iv) Estás no 4º cuadrante
   v) Estás na parte positiva do EixeX (1º e 4º cuadrantes)
   vi) Estás na parte negativa do EixeX (2º e 3º cuadrantes)
   vii) Estás na parte positiva do EixeY (1º e 2º cuadrantes)
   viii) Estás na parte negativa do EixeY (3º e 4º cuadrantes)
   ix) Este é o único punto que está en todos os cuadrantes.



h) Nas propiedades de todos os textos, en posición, elixe ***A***.

i) En Avanzado, na Condición para amosar o obxecto escribe o que se indica a continuación (pulsando *Intro* despois de cada unha):

   i) Texto1: $(x(A) > 0) \wedge (y(A) > 0)$
   ii) Texto2: $(x(A) < 0) \wedge (y(A) > 0)$
   iii) Texto3: $(x(A) < 0) \wedge (y(A) < 0)$
   iv) Texto4: $(x(A) > 0) \wedge (y(A) < 0)$
   v) Texto5: $(x(A) > 0) \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$
   vi) Texto6: $(x(A) < 0) \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$
   vii) Texto7: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge (y(A) > 0)$
   viii) Texto8: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge (y(A) < 0)$
   ix) Texto9: $x(A) \stackrel{?}{=} 0 \wedge y(A) \stackrel{?}{=} 0$

j) Coloca os textos da mellor forma posible para facilitar a visibilidade dos obxectos e rótulos, e dálles as cores que che pareza.

k) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_coordenadas_02.ggb***.

Agora, nun arquivo novo, crearemos unha lista de puntos e ...

Exercicio 3 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (-3, 0)$, $B = (-2, 4)$, $C = (0, -6)$ e $D = (1, -8)$. Se é preciso deforma a escala dalgún eixe para que se vexan todos na *Vista gráfica*. Rótulo con Nome e valor.

b) Selecciona os catro puntos (por exemplo, creando co rato un espazo rectangular que os conteña).

c) Utiliza a ferramenta *Crea lista* para crear a formada polos catro puntos. Chamarase **lista1**.

d) Escribe na *Barra de Entrada* **Polinomio**[**lista1**] e pulsa *Intro*.

e) Hai dúas sorpresas. Unha é que na Vista alxébrica créase unha desas expresións que chamamos polinomio e que ten por nome ***f***. A outra é que na Vista gráfica aparece un debuxo que pasa polos catro puntos da lista.

f) Se cambiamos o nome do polinomio por ***P*** e na Vista gráfica facemos que se vexa o nome e o valor, teremos outra sorpresa: GeoGebra indica que o debuxo que obtivemos é o do polinomio. Así que parece que os polinomios se poden debuxar.

g) Estudemos o debuxo e a expresión do polinomio con máis detalle:

   i) Coa expresión do polinomio calcula os seus valores numéricos cando x vale -3, -2, 0 e 1, respectivamente, e compara os resultados coas coordenadas dos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***. Que se observa? (podes comprobar os teus cálculos escribindo directamente na *Barra de Entrada* $P(-3)$, $P(-2)$, $P(0)$ e $P(1)$, pulsando *Intro* despois de cada un).

   ii) Escribe a conclusión nun cadro de texto.

   iii) Sitúa un punto ***E*** na gráfica de ***P(x)*** e fai que se vexa o seu valor. Move ***E*** pola gráfica e elixe un punto que teña as coordenadas enteiras ou con expresión decimal exacta, se é posible. Podes prognosticar o que valerá o valor numérico do polinomio cando se substitúa o x pola primeira coordenada do punto?

   iv) Escribe nun cadro de texto o que deduzas.

h) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_1.ggb***.

Despois do visto, trata de resolver os exercicios seguintes:

Exercicio 4 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (-2, 0)$, $B = (-1, 4)$, $C = (0, 2)$ e $D = (2, 4)$. Crea a lista **lista1** $= \{A, B, C, D\}$.

b) Obtén un polinomio ***P(x)*** que pase polos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***.

c) Indica os valores numéricos do polinomio ***P(x)*** para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$.

d) Canto valen os valores numéricos $P(-3)$ e $P(3/2)$?

e) Obtén e sinala todos os valores de x para os que o valor numérico vale cero.

f) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_2.ggb***.

Exercicio 5 (GeoGebra opcional)

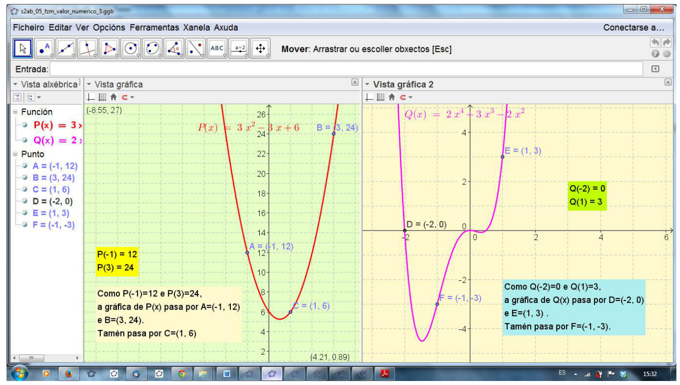
a) Calcula o valor numérico do polinomio para $x = -1$ e $x = 3$:

$P(x) = 3x^2 - 3x + 6$.

b) Calcula $Q(-2)$ e $Q(1)$ para o polinomio $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2$.

c) Indica tres puntos do plano polos que pasa a gráfica de cada un destes polinomios.

d) Garda o arquivo como ***s2ab_05_iniciais_val_num_3.ggb***.



A continuación inclúense dous exercicios propostos na correspondente proba do tema con algúns exemplos das respostas dadas polo alumnado:

Exercicio 6 (GeoGebra)

a) Debuxa os puntos do plano $A = (1, 2)$, $B = (-1, 9)$, $C = (-2, 8)$ e $D = (3, 3)$. Crea a lista **lista1** $= \{A, B, C, D\}$.

b) Obtén un polinomio ***P(x)*** que pase polos puntos puntos ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***. Fai que se vexa o nome e valor dos puntos e do polinomio.

c) Indica os valores numéricos do polinomio $P(x)$ para $x = 1$, $x = -2$ e $x = 3$.

d) Canto valen os valores numéricos $P(0)$ e $P(-1/2)$?

e) Obtén e sinala todos os valores de x para os que o valor numérico vale cero.

f) Garda o arquivo e súbeo á aula virtual como tarefa.

(Respostas: de 2,5; de 4; de 7; de 8,5).

Exercicio 7 (GeoGebra opcional)

a) Calcula o valor numérico do polinomio para $x = 2$ e $x = -1$: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

b) Calcula $Q(-1)$ e $Q(2)$ para o polinomio $Q(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4$.

c) Para o polinomio $P(x)$, indica dous puntos do plano polos que pasa a súa gráfica de modo que un deles estea no EixeY. Para o polinomio $Q(x)$, indica dous puntos do plano polos que pasa a súa gráfica de modo que un deles estea no EixeY e o outro no EixeX.

d) Garda o arquivo e súbeo á aula virtual como tarefa.

(Respostas: de 9; de 3,5).

Exercicio 8

Á vista de todo o anterior, responde, segundo a túa opinión, á pregunta seguinte, explicando o máis amplamente posible o que sinales:

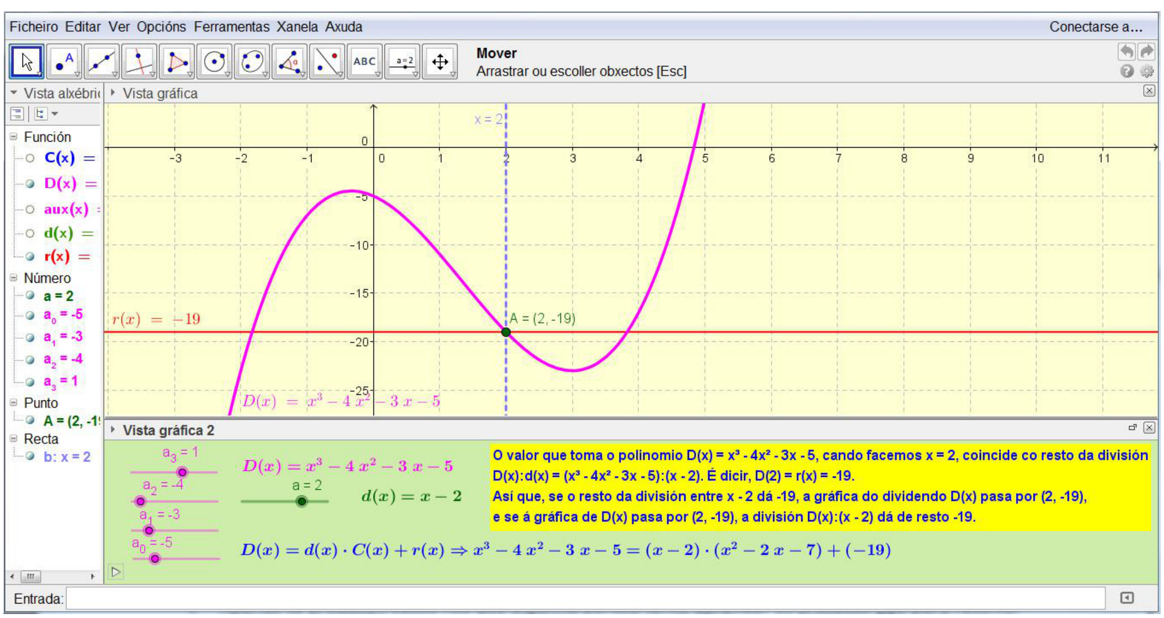
"Un polinomio é unha fórmula que se pode representar cun debuxo ou é un debuxo que se pode expresar mediante unha fórmula?"

2. Descomposición factorial e simplificación de fraccións alxébricas no 4º curso da ESO

O tratamento dos polinomios en cuarto, de cotián, non leva asociado o seu enfoque como funcións ata que nos temas específicos de funcións elementais se traballa a función lineal e a cuadrática. Encontrámonos con explicacións claras e rigorosas para matemáticos, pero de lenta asimilación para o alumnado:

> *O valor numérico dun polinomio, $P(x)$, para $x = a$, é o número que se obtén ao substituír o x por a, e efectuar as operacións indicadas. A ese número chámaselle $P(a)$.*
> *Por exemplo, se $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$, para $x = 3$, obtemos:*
> $P(3) = 7 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 94 \cdot 3 + 7 = -5.$
> *Este valor, $P(3) = -5$, coincide co resto de dividir $P(x)$ entre $x - 3$. E isto non é casual, senón xeral.*
> *Teorema do resto: O valor que toma un polinomio, $P(x)$, cando facemos $x = a$, coincide co resto da división $P(x) : (x - a)$. É dicir, $P(a) = r$.*
> *Máis claramente:*
>
> - *Se en $P(x)$ substituímos x por a e facemos as operacións, obtemos un número ao que chamamos $P(a)$ (valor do polinomio para $x = a$).*
> - *Se dividimos $P(x)$ entre $x - a$, o resto é un número r.*
>
> *Pois ben, o teorema asegúranos que $P(a) = r$.*

Unha proposta alternativa ou complementaria a esta, tense no arquivo ***teorema_resto_02.ggb***.



Os enfoques desta proposta alternativa ou complementaria, que pode pasar pola construción directa, total ou parcial do alumnado, ou pola manipulación da figura xa realizada, ou, incluso, só pola utilización expositiva do profesorado, descansan sobre algunhas ou todas as consideracións seguintes:

- GeoGebra pode utilizarse na clase como comprobación de calquera extremo.
- Potenciar o uso sistemático da representación gráfica asociada aos procesos alxébricos para os que sexa posible.
- Adaptarse á utilización de ferramentas de cálculo simbólico que permiten comprobar resultados obtidos, orienta sobre como afrontar problemas mediante a experimentación repetida, e potencia a asociación dos conceptos teóricos e prácticos de forma continuada.
- Non preocupa o uso ou abuso que, das posibilidades de GeoGebra (ggb en diante), poida facer o alumnado. Cando é capaz de utilizar o proceso ggb necesario para obter o resultado desexado, na maioría dos casos, sabe o que busca ou apréndeo ao atopalo.
- Apenas se producen casos nos que algunha persoa tenta aprender os procesos ggb para resolver as cuestións analíticas ou conceptuais que se lle formulan. É moito menos frecuente que os intentos de copiar. En calquera caso, o beneficio obtido, por quen o faga, será moi superior ao suposto prexuízo teórico que puidese ocasionarlle, xa que está manexando ferramentas matemáticas que trata de artellar adecuadamente para obter as conclusións buscadas; experimenta por acerto e erro e, por medio desa experiencia, está conseguindo resultados que o obrigan a deducir e decidir sobre o que vai obtendo e sobre o que está buscando.
- En resumo, que se facilita outra forma de aprender que poida que marque ou non o futuro, pero que, de calquera xeito, establece unha nova dimensión na aprendizaxe das matemáticas.

A modo de ilustrar de xeito moi concreto o tratamento que se lle deu aos polinomios en cuarto curso, partirase dunha das probas (exames), que se lle puxo a un dos grupos: ***s4ab_02_p_b.pdf***.

Nesta proba aparecen nove exercicios, nos que, en tres, se traballan especificamente contidos con GeoGebra. Nos outros, o alumnado pode usar o programa libremente se quere ou se pode, aínda que as respostas teñen que axustarse ao pedido nos enunciados (cando se sinala, analiticamente, ou, paso a paso, ...).

O primeiro exercicio específico ggb indica:

> *Ejercicio 4.-*
>
> a.. *Crea un polinomio de tercer grado que tenga sólo dos raíces enteras. Escribe en un cuadro de texto de GeoGebra la forma de obtenerlo, haz que se vea su gráfica, su expresión extendida y los puntos de corte con el EjeX* (s4b_iniciais_proba_4a.ggb).
>
> b.. *Crea un polinomio de cuarto grado con dos raíces reales no enteras y las otras dos no reales. Escribe en un cuadro de texto de GeoGebra la forma de obtenerlo, haz que se vea su gráfica, su expresión extendida y los puntos de corte con el EjeX* (s4b_iniciais_proba_4b.ggb).

A resposta ao apartado a.., está relativamente aberta. O alumnado pode deducir que a terceira raíz é unha fracción ou un irracional (xa que na clase viu que as non reais ían a pares), aínda que quizais entenda que hai tres raíces enteiras (de xeito que unha está repetida). Admitíronse as dúas respostas como válidas.

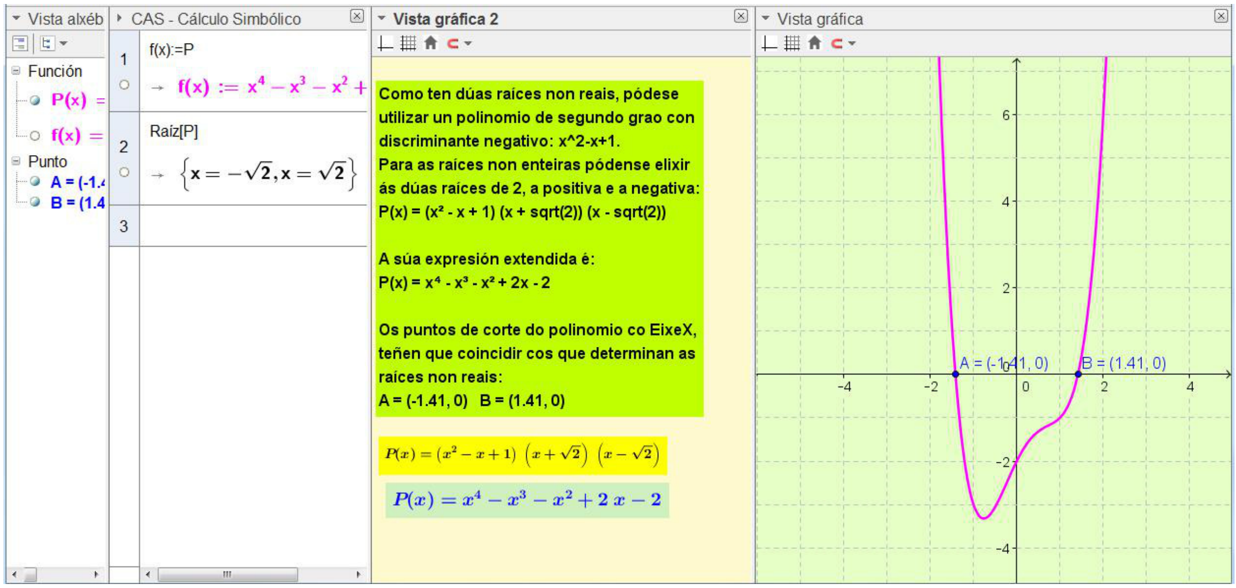
Un exemplo con raíz dobre pode ser ***s4b_iniciais_proba_4a_dobre.ggb***, e un cunha raíz fraccionaria pode ser ***s4b_iniciais_proba_4a_fraccion.ggb***.

Inclúese o vídeo da construción do primeiro caso.

(Exemplos do contestado polo alumnado: de 8, de 4).

A resposta ao apartado b.. busca aproveitar o aprendido respecto a que cando o discriminante dunha ecuación de segundo grao é negativo, a ecuación non ten solucións reais.

A construción ggb que hai que realizar pode partir da feita no apartado anterior, con leves modificacións, como se ve no arquivo ***s4b_iniciais_proba_4b.ggb*** e no vídeo correspondente.



O segundo exercicio específico da proba é o seguinte:

Ejercicio 5.-

a.. *Obtén el MCD y el MCM de los polinomios (sin realizar las operaciones):*
$P(x) = 2x(x-1)^3(x+2)$ e $Q(x) = 3x^2(x-1)^2$

b.. *Escribe, con ayuda de GeoGebra, la expresión extendida del MCM y MCD anteriores (s4ab_iniciais_proba_5b.ggb).*

c.. *Obtén dos polinomios $R(x)$ y $T(x)$ (de grado cuatro) de manera que $R(3) = 0$, $T(1) = 0$ y de modo que su MCD sea: $MCD(R(x), T(x)) = (2x+1)^2(3x-5)$*

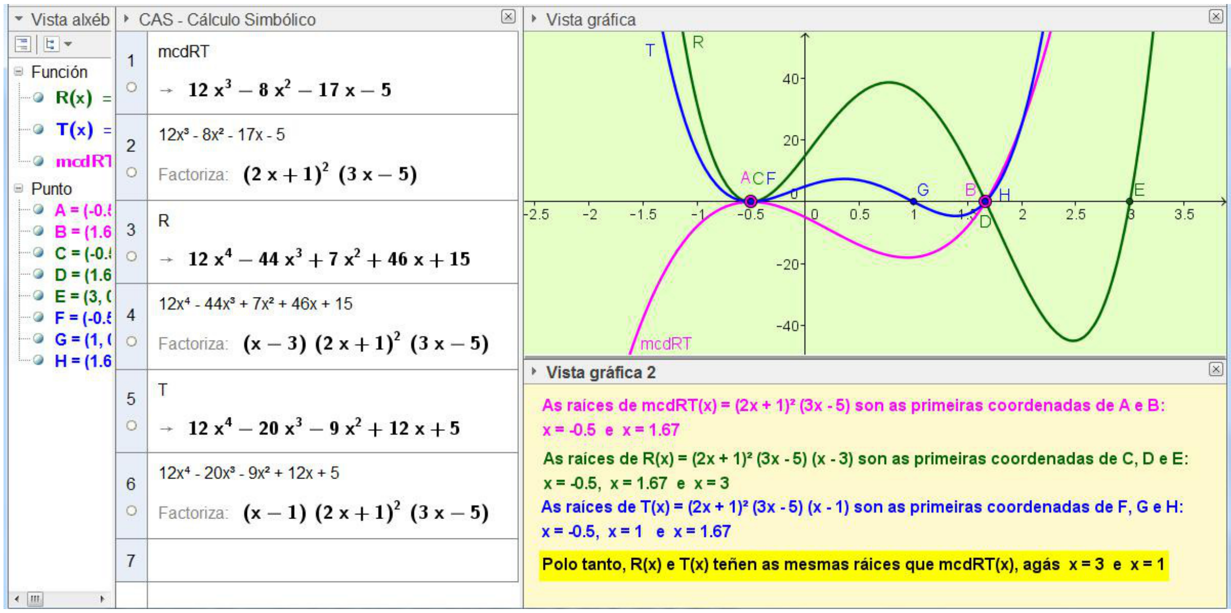
d.. *Comprueba con GeoGebra que R y T tienen las mismas raíces que su MCD, excepto en $x = 3$ y $x = 1$, dibujando sus gráficas y señalando los puntos de corte con el EjeX. (s4ab_iniciais_proba_5d.ggb)*

No apartado a.., só se pretende a utilización dos conceptos correspondentes.

No b.., GeoGebra dá a resposta do apartado a.., pero preténdese que se use como comprobante aínda que non se ve como problemático o seu propio uso para resolver, polo indicado anteriormente respecto á riqueza de conceptos e procesos que aporta a manipulación do programa. En calquera caso o que se obtén no ggb ***s4ab_iniciais_proba_5b.ggb***, é moito máis que o que se pide no exercicio (vídeo).

Os obxectivos dos apartados c.. e d.. resultan claros e son ambiciosos: As raíces do MCD son as comúns aos dous polinomios, as primeiras coordenadas dos puntos de valor numérico cero definen raíces, as raíces determinan cortes co EixeX, calquera raíz "a" determina un factor "$x - a$", os puntos de corte das gráficas teñen significado alxébrico, as gráficas van asociadas cos valores numéricos, ...

No arquivo ***s4ab_iniciais_proba_5d.ggb***, pódese ver un estudo bastante amplo do sinalado. Só unha parte del, a relativa especificamente ao referido no enunciado, é a que se lle pide ao alumnado.



(Exemplos do contestado polo alumnado: de 8, de 5, de 3, de 2).

O terceiro exercicio específico da proba ten o seguinte enunciado:

Ejercicio 7.-

a.. *Simplifica (analíticamente e indicando paso a paso) la siguiente fracción algebraica:*

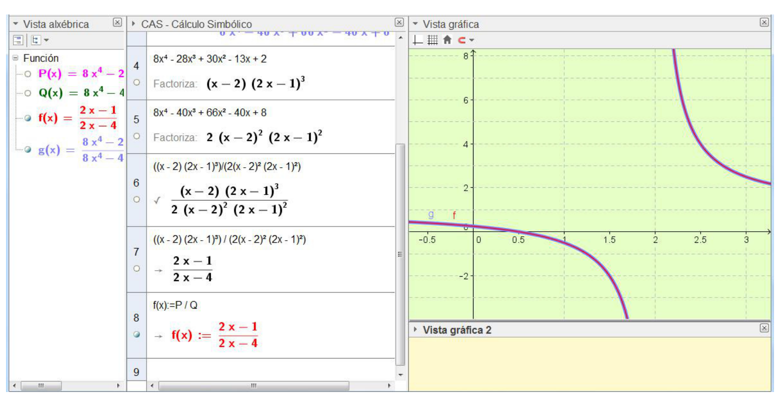
$$\frac{2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(2x+3)^2(2x-2)}$$

b.. *Simplifica utilizando GeoGebra, escribiendo previamente la descomposición de numerador y denominador (s4ab_iniciais_proba_7b.ggb):*

$$\frac{8x^4 - 28x^3 + 30x^2 - 13x + 2}{(8x^4 - 40x^3 + 66x^2 - 40x + 8}$$

Os obxectivos do apartado a.., están moi definidos: simplificación mediante descomposición factorial usando as ferramentas típicas: factor común, Ruffini, ecuación de segundo grao, produtos notables, se é o caso, ... Non obstante, isto non impide que o realizado sexa comprobado mediante algún proceso ggb, ou que, antes de obter o resultado, se investigue con GeoGebra cal terá que ser a resposta.

No vídeo do apartado b.., pódese apreciar o interesante fío do proceso que leva á conclusión. Dado o caso, tamén se podería comprobar a diferenza entre as gráficas da fracción alxébrica inicial e da simplificada.



O arquivo rematado é este.

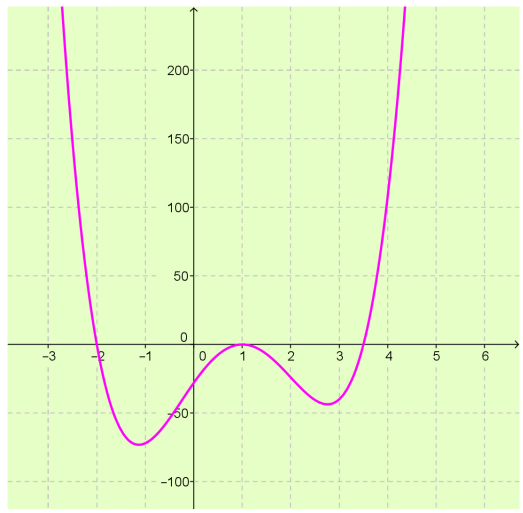
É notable sinalar que se está a utilizar pouco o carácter dinámico de GeoGebra. Quizais neste tema de 4º ESO, o simbolismo alxébrico está a un nivel o suficientemente alto para que o alumnado poida aproveitar máis matices. Non obstante, en varios dos exercicios propostos poden crearse esvaradores (*deslizadores*) para coeficientes ou raíces de polinomios, caixas de entrada para os propios polinomios que aparecen, ...

Para rematar esta segunda pincelada sobre polinomios no 4º curso da ESO, esbozamos outro exercicio da proba, que non pide resolución con GeoGebra, pero que, como moitos outros, a súa resolución ggb non desmerece da exclusivamente escrita, mais, ao revés, ofrece matices enriquecedores e mesmo inesperados:

Ejercicio 9.-

b.. *A la vista del gráfico siguiente indica la descomposición factorial de $P(x)$ y sus raíces, sabiendo que tiene grado 4 , que uno de sus factores es $2x - 7$, y que su coeficiente principal es 4:*

c.. *¿Cuánto valen los valores numéricos de $P(x)$ en $x = 1$ y $x = 0$, $P(1)$ y $P(0)$?*



No vídeo vanse realizando tentativas (lóxicas ou non en función dos coñecementos adquiridos), ata dar coa solución. Comézase cun traballo de adaptación de escalas coa utilización da segunda vista gráfica. Para o apartado c.., o enunciado non especifica método, así que se pode elixir o ggb, malia a obvia contestación de $P(1)$ (remate do vídeo).

2.1. Apéndice. Transformación de funcións

Neste apéndice, crearase un polinomio de cuarto grao algo especial (con coeficiente principal suficientemente pequeno) partindo das súas raíces, e que permita apreciar visualmente os efectos das diversas transformacións ás que se verá sometido. Unha vez apreciado o efecto, a función poderase cambiar por calquera outra para o estudo de diferentes casos e posibilidades.

2.1.1. Construír unha función de 4º grao, que poderemos modificar empregando esvaradores.

a. Colocaremos as diferentes vistas dun xeito similar ao que se ve na figura (ao final). Como opcións de partida tomamos Redondeo a tres decimais e Rotulaxe en só novos puntos.

b. Deixamos os eixes e a cuadrícula visible na Vista gráfica principal e quitámolos da segunda. Activamos a Vista gráfica 2 premendo sobre ela.

c. Barra de Entrada: introducimos os valores **0.006**, **-4**, **-1**, **3** e **9**, pulsando intro entre cada un deles.

d. Premer sobre cada un dos "puntos baleiros" que están ao lado de cada un dos valores que apareceron na Vista alxébrica. Dese modo amósanse os esvaradores na Vista gráfica 2 (porque é a que está activa).

e. Prememos co botón dereito sobre os obxectos da Vista alxébrica ou sobre os esvaradores, e eliximos Propiedades. Na pestana "Esvarador" deixámolos todos co Ancho en 100 px., e modificamos os valores iniciais de cada un deles:

a: min = -1, max = 1, incremento = 0.001.
b, c, d, e: min = -10, max = 10, incremento = 0.1.

f. Barra de Entrada: introducir a función:***f(x)=a(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)***. Facendo clic co botón dereito sobre a función accedemos ao cadro de diálogo de Propiedades de Obxecto onde se modifica a súa cor e grosor.

g. Crear un punto no eixe de abscisas e visualizar a súa imaxe:

   i. Coa ferramenta *Novo punto* debuxar un punto ***A*** sobre o eixe de abscisas premendo sobre dito eixe. Ocultar o rótulo de ***A***.

   ii. Escribir na Barra de entrada o texto ***"x = "+x(A)***. Nas propiedades deste texto, en Posición, elixir A e, en Cor, darlle unha de fondo suave.

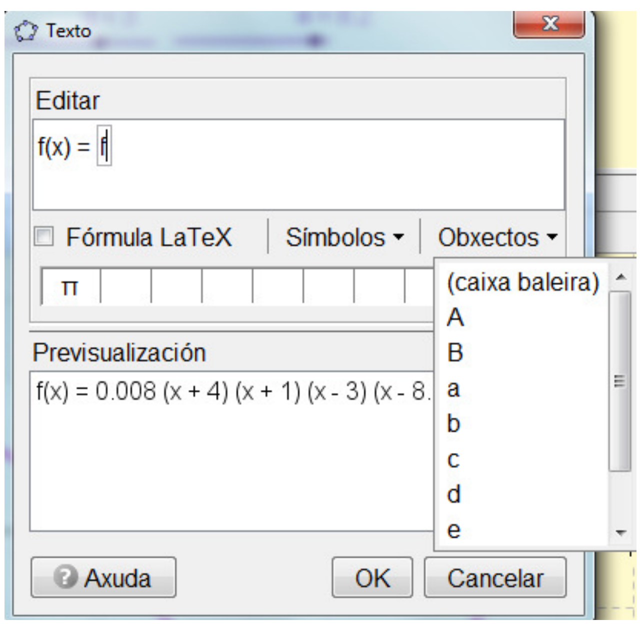
   iii. Barra de entrada: Escribir ***(x(A),f(x(A)))***. Dese xeito aparece o punto ***B*** sobre a gráfica, coa mesma abscisa que o punto ***A***. Amosar só o rótulo do valor do punto ***B***.

   iv. Barra de entrada: Escribir ***C=(0,y(B))***. Ocultar o rótulo de ***C***.

   v. Coa ferramenta *Segmento*, debuxar os segmentos ***AB*** e ***CB***, con eses nomes e, nas súas propiedades, elixir na pestana de estilo, estilo de recta, puntos; e ocultar os rótulos.

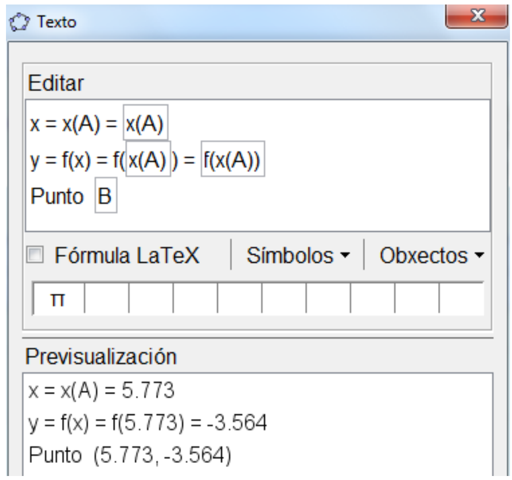
h. Crear un texto ilustrativo do concepto de función ligado á gráfica construída na Vista gráfica 2:

   i. Coa ferramenta *Inserir texto*, escribir: ***f(x) =*** $\boxed{\boldsymbol{f}}$. A ***f*** dentro da caixa. Conséguese facendo clic esquerdo sobre ela na Vista alxébrica ou na gráfica. Tamén, elixíndoa no depregable de Obxectos ou collendo no mesmo despregable a (*caixa valeira*) e escribindo f no seu interior.



   ii. Pódese activar Fórmula LateX ou non. Nos polinomios a diferenza é só estética, pero coas fraccións alxébricas, por exemplo, cambia o formato de saída.

iii. Seguindo algún dos procedementos descritos, escribir os seguintes textos:



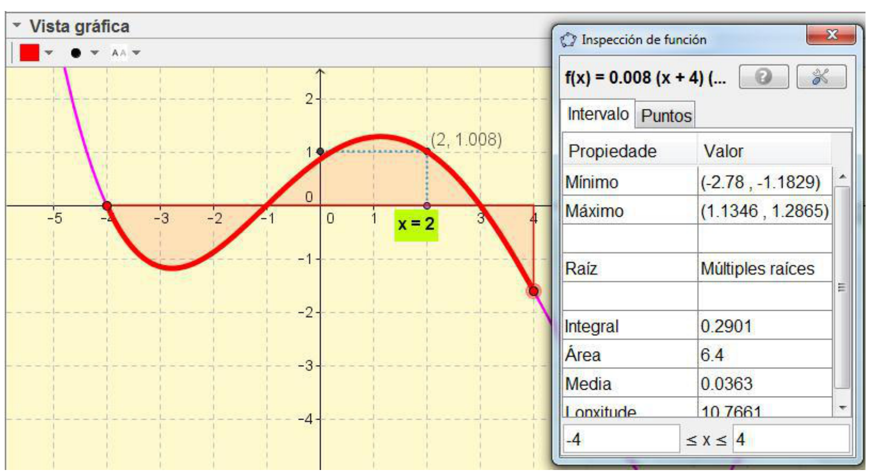
iv. Adornar os textos se se desexa.

v. Darlles a todos eles, Posición absoluta de pantalla.

2.1.2. Análise de elementos característicos dunha función

a. Seleccionar a ferramenta *Inspección de Función* e facer clic sobre a función ***f(x)***. Na pestana Intervalo, observar os máximos e mínimos e os puntos de corte da función no dominio que aparece seleccionado.

b. Modificar os extremos do intervalo, mover os esvaradores do coeficiente principal e das raíces de $f(x)$ e observar os cambios.



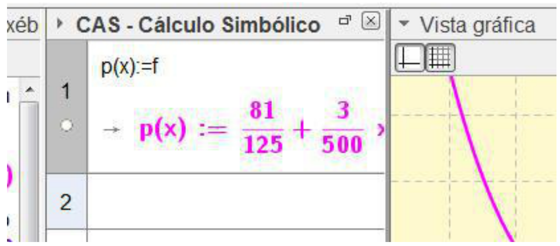
c. Seleccionar a pestana Puntos, cambiar o paso e engadir máis puntos facendo clic no botón Expón táboa de puntos (premer no botón inferior esquerdo da nova xanela).

d. Modificar as coordenadas dos puntos cambiando o número directamente na cela.

e. Cambiar o número de cifras decimais no redondeo facendo clic no botón Opcións que aparece na parte superior dereita da ferramenta *Inspección de Función*.

f. Finalmente, pechamos a ferramenta.

g. Para obter unha expresión estendida da función nun texto, activamos a Vista CAS no menú Ver. Escribimos ***f*** e pulsamos a ferramenta *Avalia (cálculo exacto)*, a do signo igual. Aparece unha expresión calculada. Premendo sobre o circuliño que hai baixo o "1" da Vista CAS, aparece outra función, quizais de nome p, idéntica a f, pero con formato estendido. Ocultámola.



h. Creamos na Vista gráfica 2 o texto LaTeX, ***f(x)*** $= \boxed{\boldsymbol{p}}$. Adornámolo e dámoslle Posición absoluta de pantalla.

Co visto ata este momento poderíanse ensinar contidos da ESO como: dominio, imaxe, corte cos eixos, signo dunha función, crecemento e decrecemento, máximos e mínimos...

2.1.3. Crear a transformada da función orixinal con catro parámetros

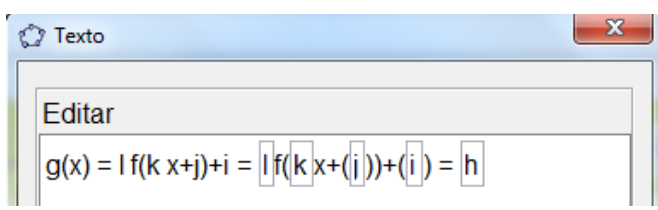
a. Crear outros catro esvaradores na Vista gráfica 2, escribindo na liña de Entrada, sucesivamente: ***i=0, j=0, k=1, l=1***.

b. Facendo clic sobre o circuliño que aparece á esquerda destas catro últimas igualdades, amósase un esvarador para cada unha destas variables. Modificar as súas propiedades para que se vexan parecidos aos outros pero de diferente cor.

c. Barra de Entrada coa Vista gráfica principal activa: Escribir ***g(x)=l f(k x+j)+i*** (os espazos en branco entre letras son produtos).

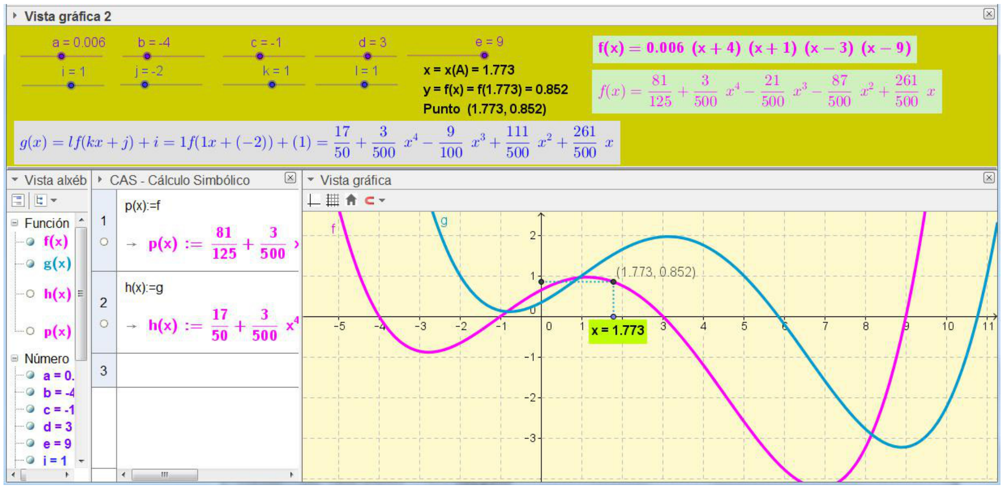
d. Na Vista CAS, escribir na segunda liña ***g*** e pulsar de novo *Avalia*. Ocultar a función que se crea (quizais ***h***, depende da orde dos pasos e modificacións feitas na construción).

e. Coa ferramenta *Inserir texto*, escribir na segunda vista gráfica:

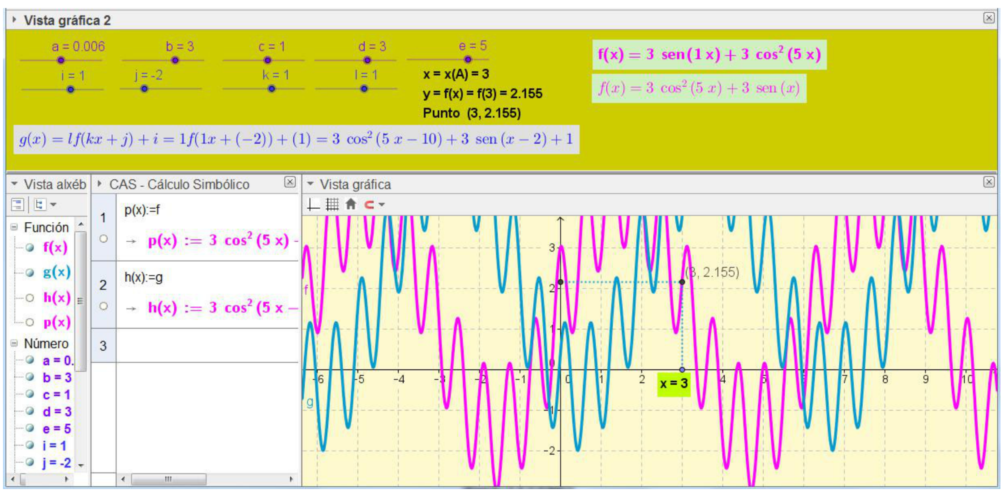


f. Nas propiedades do texto modificar cor e tamaño para que sexa ben visible. Posición absoluta de pantalla.

g. Mover os esvaradores ***i, j, k, l***, para comprobar os resultados obtidos, ...



h. Se se desexa traballar con outras funcións máis vistosas, os resultados son inmediatamente adaptables. Por exemplo:



i. Gardar o arquivo ***transformacion_funcions_01.ggb***.

FERNANDO ZACARÍAS MACEIRAS
Grupo XeoDin
<fzacarias@edu.xunta.es>