

# Historias da curva do can

LUIS PUIG MOSQUERA

---

A curva tractriz, coñecida tamén como curva de persecución, ten unhas especiais particularidades. Entre as súas características destacan que é unha curva equitangencial, que a súa evoluta é a catenaria ou que, ao xirar ao redor da súa asíntota, dá lugar á pseudoesfera, superficie na que se verifica a xeometría de Lobachevski.

*Palabras chave:* Curva, Tractriz, Equitangencial, Evoluta, Catenaria, Asíntota, Pseudoesfera.

#### Dog's Curve Stories

The tractrix curve, also called pursuit curve, has some characteristics. Among its features are that it is an equitangential curve, its evolute is the catenary or when turning around its asymptote it generates the pseudosphere, a surface on which Lobachevsky's Geometry is verified.

*Keywords:* Curve, Tractrix, Equitangential, Evolute, Catenary, Pseudosphere.

---

Seguro que vostede, ao ver correr algún can, de palleiro ou calquera outra raza, tras un coche nalgunha das moitas pistas que atopamos polos nosos campos, repararía na forma estraña que ten de facelo, observando que non segue unha traxectoria recta. O gráfico que se acompaña (figura 1) simula a devandita traxectoria, que non é senón o obxecto principal deste artigo, a curva do can.

Aínda que fosen distintos matemáticos os interesados en analizar as súas características esenciais, entre os que destacan Newton, Johann Bernoulli e Leibniz, parece que fora Huygens, en 1692, o primeiro en obter a súa ecuación, dándolle o nome de *curva tractriz*. A tractriz, curva do can ou curva de persecución, é coñecida tamén como curva equitangencial, en virtude de estar dotada desta característica.

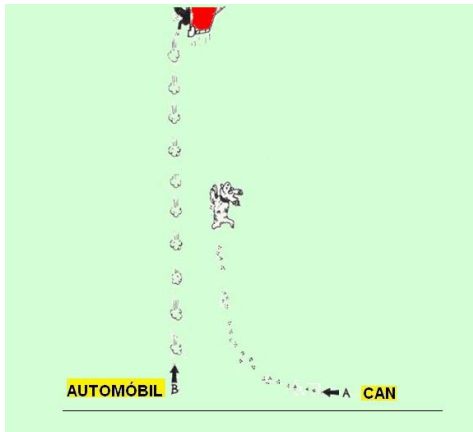


Figura 1: Imaxe modificada a partir dun orixinal de Bolt (1997)

Pero non é só o nome de *curva equitanxencial* o que se explica por unha propiedade da curva. Como imos ver a continuación, os outros nomes que recibe xustificanse por evidenciar algúns dos seus aspectos, sobre os que nos ocupa. Polo momento, diremos que o nome *tractriz* procede do verbo latino *trahere* (tirar), nome introducido por Claude Perrault<sup>1</sup> en 1693 quen, cando, ao xeito de desafío matemático, cousa moi habitual naquela época, propuxo o correspondente problema<sup>2</sup> a Leibniz, a describía deste xeito:

Poñer un reloxo de peto con cadea sobre unha mesa, de modo que a cadea estea tensa, e o extremo contrario ao reloxo estea no bordo da mesa. Mover entón ese extremo seguindo o bordo da mesa, para asegurar que se traslade en liña recta.

*A curva que describe o reloxo é a tractriz.*

A verdade é que estaría máis afortunado Perrault se propuxese calquera outro obxecto ríxido en lugar dunha cadea. Pero, en fin, tamén neste artigo se utilizará unha corda, que adoece do mesmo inconveniente. Apélase á condición da rixidez que debe manter a cadea (figura 2, á esquerda) para cumprir os requisitos do enunciado de Perrault.

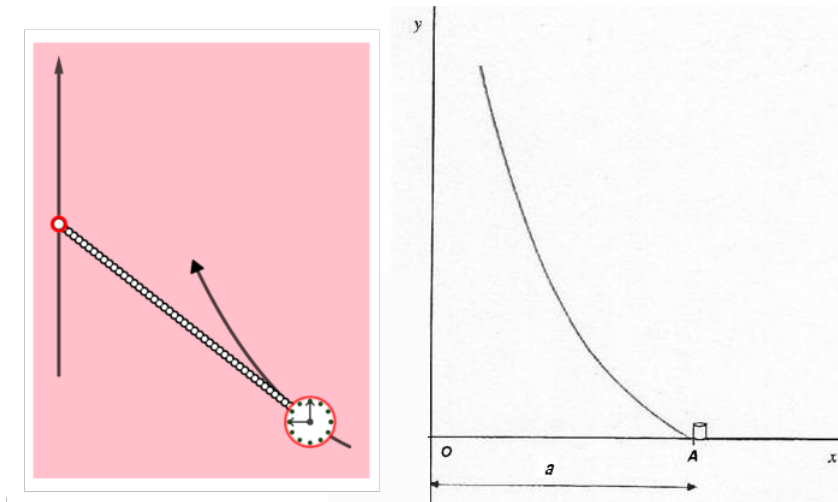


Figura 2: Colocamos un reloxo de peto sobre unha mesa rectangular e estiramos a cadea de xeito que quede disposta perpendicularmente a dous dos lados da mesa e que o seu extremo libre chegue ata o bordo dun deles. Se desprazamos o extremo libre da cadea ao longo do bordo da mesa, que liña segue o reloxo?

## Definición. Ecuacións cartesianas e paramétricas

A característica que define a curva do can é a de ser equitanxencial. Que quere dicirse ao caracterizala como equitanxencial? Pois que cumpre, en cada un dos seus puntos, o seguinte: o segmento de tanxente entre o punto de tanxencia e a asíntota (dirección rectilínea do automóbil) é constante.

A definición anterior, podemos ilustrala doutro xeito que, por outra banda, xustifica outro dos nomes polo que é coñecida esta curva xerada de xeito mecánico: *curva de arrastre*. Supoñamos que temos unha corda suxeita do extremo libre da mesma ( $O$ ), xa que noutro extremo,  $A$ , temos atado un pequeno caldeiro (figura 2, á dereita). Mantendo sempre a corda tensa, ao movérmonos pola parte positiva do eixe  $OY$ , o bote describe tamén a curva tractriz, razón pola que se coñece tamén como *curva de arrastre*.

O nome de *curva de arrastre* tamén se pon en evidencia por ser a traxectoria que describe calquera das rodas do remolque dun automóbil cando realiza unha viraxe de  $90^\circ$ , tal e como vemos na imaxe da esquerda da figura 3. Na dereita, o tren que arrastra o obxecto circular móvese na dirección do eixe  $OX$ , fronte á traxectoria vertical do automóbil. Con tal motivo, as curvas de arrastre están orientadas de xeito diferente nas dúas imaxes.

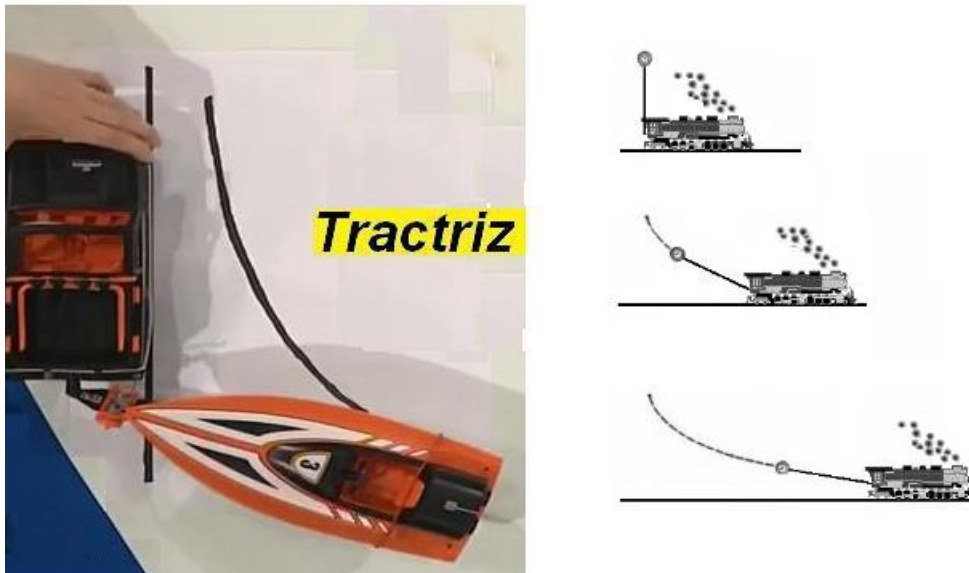


Figura 3: A imaxe da esquerda corresponde ao vídeo do programa “La aventura del saber” de Televisión Española, La 2, no que baixo o título “¿Qué matemáticas tienen en común un perro, un remolque, el Universo y un edredón?”, a profesora Guadalupe Castellano divulgara diferentes aspectos da curva de arrastre (véxase [5]). Á dereita, un tren arrastra un obxecto circular mediante un cable ríxido. A curva que describe o obxecto é a curva de arrastre, unha tractriz.

Volvamos á condición equitanxencial da curva tractriz coa que a definimos ao comezo do epígrafe: partindo do punto  $A(a, 0)$ , en cada un dos seus puntos cumpre que a lonxitude do segmento da tanxente, comprendido entre o punto de tanxencia e a intersección da propia tanxente co eixe  $OY$ , é constante (figura 4). Coa elección que se fixo do punto  $A(a, 0)$ , posto que a tanxente no devandito punto é horizontal, a constante ten que ser  $a$ , distancia entre os puntos  $O$  e  $A$ , que representa a lonxitude da corda –idealmente sempre tensa– coa que se arrastra o bote ou o remolque, segundo o caso que queiramos considerar.

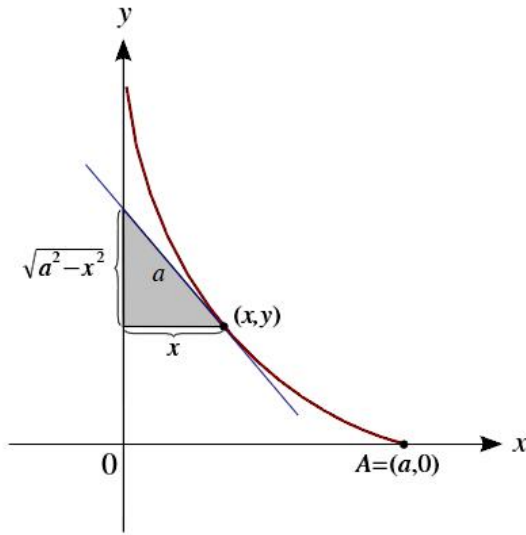


Figura 4: Sobre a tanxente en cada punto  $(x, y)$ , a distancia entre o punto de tanxencia e o de intersección co eixe  $OX$  ten sempre lonxitude  $a$ , motivo polo que é coñecida como *curva equitanxencial*.

Para determinar a ecuación cartesiana da curva do can, a segunda consideración é que  $y'$ , pendente da recta tanxente no punto xenérico de coordenadas  $(x, y)$ , é tamén a pendente da hipotenusa do triángulo rectángulo da figura 4.

Polo tanto,  $y' = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ . Ademais, como sabemos que a curva comeza a describirse a partir de  $A(a, 0)$ , punto de partida do can ou do obxecto arrastrado, temos que engadir a condición  $y(a) = 0$ . En consecuencia, para determinar a ecuación da curva, deberemos resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

Por estaren separadas as dúas variables, non hai máis que integrar os dous membros da ecuación.

$$y = \int \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$$

Para resolver a integral basta con aplicar o cambio de variable<sup>3</sup>:  $x = a \operatorname{sen} t$

$$\begin{aligned} - \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx &= - \int \frac{a \cos^2 t}{\operatorname{sen} t} dt = -a \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t} dt = a \int \frac{\operatorname{sen}^2 t - 1}{\operatorname{sen} t} dt \\ &= a \int (\operatorname{sen} t - \operatorname{cosec} t) dt = a (-\cos t + \ln(\operatorname{cosec} t + \cot t)) + c \\ &= a \left( \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + c \end{aligned}$$

Advertindo que a curva obtida podería ter dúas ramas: unha por encima e outra por debaixo do eixe  $OX$ , que virían respectivamente dadas polos signos positivo e negativo da ordenada, chegamos finalmente á súa expresión cartesiana máis habitual, aínda que existan outras posibilidades para escribirla.

$$\begin{aligned} y &= \pm \left( \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) \right) + c, \text{ ou ben,} \\ y &= \pm a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) \mp \sqrt{a^2 - x^2} + c \end{aligned}$$

Se engadimos a condición adicional citada,  $y(a) = 0$ , obtemos que a constante  $c$  é nula e, polo tanto, a ecuación cartesiana da curva queda finalmente do xeito:

$$y = \pm a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) \mp \sqrt{a^2 - x^2}; \quad 0 < x \leq a$$

Partindo da expresión anterior e observando a figura 5, na que xa aparecen debuxadas as dúas ramas citadas, tomaremos como parámetro o ángulo  $t$  para obter unha parametrización da curva. Deste xeito, no triángulo rectángulo de hipotenusa  $a$ , temos que  $x = a \operatorname{sen} t$ . Para determinar a expresión da ordenada bastará con substituír na expresión cartesiana obtida con anterioridade. Tendo presente as relacións trigonométricas do ángulo metade, resulta finalmente que:

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen} t \\ y(t) = \pm a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) \end{cases}; \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2}$$

Se quixésemos comprobar que, efectivamente, a parametrización corresponde á tractiz, bastaría verificar que, segundo a definición que se dera en liñas anteriores, o segmento de tanxente comprendido entre o punto de tanxencia e o eixe  $OY$  ten lonxitude  $a$ . Ímolo facer.

Chamando  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ , a pendente da tanxente é o cociente entre a segunda e a primeira compoñente do vector tanxente,

$$\vec{r}'(t) = \left( a \cos t, \frac{a}{2 \tan \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} - a \operatorname{sen} t \right) = \left( a \cos t, \frac{a \cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \right)$$

Polo tanto, a pendente da recta tanxente será  $\cot t$ , e a recta tanxente, nun punto xenérico de coordenadas  $(a \operatorname{sen} t, a (\cos t + \ln (\tan \frac{t}{2})))$ , terá por ecuación:

$$y - a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) = \cot t (x - a \operatorname{sen} t).$$

A intersección da recta tanxente co eixe de ordenadas é o punto  $(0, a \ln (\tan \frac{t}{2}))$ . Agora, só temos que calcular a distancia entre o punto de tanxencia,  $(a \operatorname{sen} t, a (\cos t + \ln (\tan \frac{t}{2})))$ , e o punto de intersección co eixe de ordenadas,  $(0, a \ln (\tan \frac{t}{2}))$ . Resulta sinxelo o cálculo, que dá como resultado  $a$ , o que proba que a parametrización elixida corresponde á curva tractiz.

Outra parametrización, usual tamén na tractiz, é a que se obtén utilizando as funcións hiperbólicas a partir da anterior, mediante o cambio de variable  $\operatorname{sen} t = \frac{1}{\cosh \theta}$ , quedando do xeito:

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{a}{\cosh \theta} \\ y(\theta) = a (\theta - \tanh \theta) \end{cases} \quad \theta \geq 0$$

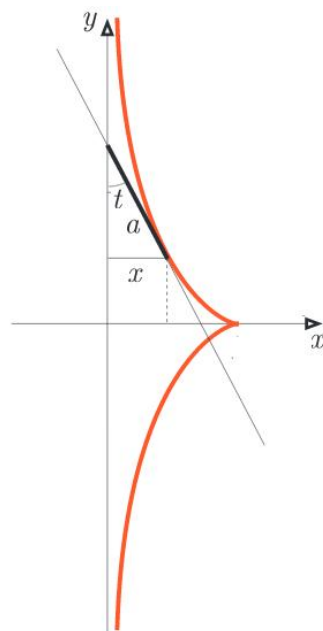


Figura 5

No sucesivo, segundo faciliten os correspondentes cálculos, elixiremos as coordenadas cartesianas ou as paramétricas. Neste último suposto, co mesmo criterio citado, optaremos por unha das dúas parametrizacións presentadas.

## Características da tractriz

O eixe de abscisas, ao que corta no punto  $(a, 0)$ , é eixe de simetría para a curva. Pola súa banda, o eixe de ordenadas representa unha asíntota vertical para a mesma.

Para rectificar a tractriz, podemos utilizar a parametrización obtida en primeiro lugar. Temos que calcular a lonxitude dunha das súas ramas, dende o seu punto de arranque  $A(a, 0)$  até un punto xenérico  $P(x(t), y(t))$ . Así, a lonxitude da tractriz será:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^t \|\vec{r}(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \left\| \left( a \cos t, \frac{a \cos^2 t}{\sin t} \right) \right\| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sqrt{(a \cos t)^2 + \left( \frac{a \cos^2 t}{\sin t} \right)^2} dt \\ &= a \int_{\frac{\pi}{2}}^t |\cot t| dt = a \ln |\sin t| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^t = a \ln(\sin t) \end{aligned}$$

Posto que  $x = a \sin t$ , podemos expresar finalmente a lonxitude da tractriz do xeito:

$$s(x) = a \ln \frac{x}{a}$$

En canto á superficie limitada pola curva do can (ambas as dúas ramas) e a súa asíntota, a súa medida é a mesma dunha semicircunferencia de radio  $a$ , é dicir,

$$S = \frac{1}{2} \pi a^2$$

O resultado anterior, que non deixa de ser sorprendente en principio, admite unha demostración visual baseada no teorema de Mamikon.

### Teorema de Mamikon

Todos os aneis ovais varridos por un segmento de lonxitude constante  $a$ , cun extremo tanxente a unha curva plana pechada suave, teñen igual área, independentemente da forma da curva dada. O seu valor é  $\pi a^2$ .

Especialmente axeitado ao caso da tractriz, xa que a lonxitude do segmento tanxente é constantemente igual a  $a$ , o problema é que curva tractriz non é unha curva pechada, de maneira que necesitamos un segundo teorema de carácter máis xenérico, que evite a dificultade aludida.

Para estes casos existe outra formulación do teorema que precisa poñer en claro o que é un *varrido de tanxentes* –tangent sweep–, rexión limitada por segmentos de lonxitude arbitraria, tanxentes por un dos seus extremos a unha curva dada. O varrido de tanxentes transformámolo nun *feixe de tanxentes* –tangent cluster–, resultado de trasladar os segmentos tanxentes paralelamente a eles mesmos, de xeito que todos os puntos de tanxencia pasen a ser un único punto común despois da translación (figura 6). Pois ben, a reformulación do teorema de Mamikon asegura que, *con independencia da curva de partida, o varrido de tanxentes, e o feixe de tanxentes teñen a mesma superficie ambas as dúas rexións*.



Figura 6: A superficie varrida polos segmentos de tanxentes a unha curva é a mesma que abrangue o seu feixe de tanxentes con independencia da curva dada (Mamikon).

Volvendo ao caso da tractriz, trasladamos os segmentos tanxentes de xeito paralelo a eles mesmos e transformamos todos os seus respectivos extremos de tanxencia nun único punto, vértice do feixe (figura 7). Aplicando a segunda versión dada do teorema de Mamikon, a superficie varrida polos segmentos das tanxentes transfórmanse nun feixe que conforma unha semicircunferencia. Con tal motivo, conclúese que a superficie comprendida entre a curva e a súa asíntota é  $\frac{1}{2}\pi a^2$ . Acaso agora o resultado deixe de ter a condición de sorpresa que tiña inicialmente.

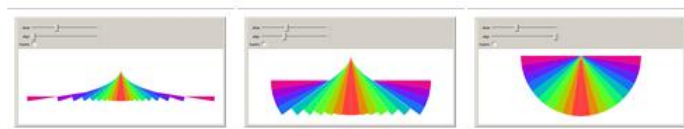


Figura 7: Secuencias da demostración visual da superficie comprendida entre unha curva tractriz e a súa asíntota. A correspondente animación completa atópase en:

<http://demonstrations.wolfram.com/AreaUnderTheTractrix/>

Examinemos a continuación cal é a curvatura da nosa curva, desta vez, usando coordenadas cartesianas, nas que a expresión da curvatura,  $\kappa$ , vén dada pola expresión:

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

Posto que sabemos que  $y' = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ , punto de partida na dedución da ecuación cartesiana, e derivando obtemos  $y'' = \frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$ , despois de realizar sinxelas operacións, chegamos a  $(1 + (y')^2)^{3/2} = \frac{a^3}{x^3}$ , resultado que xa permite calcular a curvatura da tractriz:

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}}{\frac{a^3}{x^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Reparando en que  $\tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  (figura 6) e substituíndo na fórmula obtida para  $\kappa$ , conséguese unha nova  $\kappa = \frac{\tan t}{a}$ , que permite calcular a curvatura da tractriz cando esta veña dada pola parametrización:

$$\begin{cases} cx(t) = a \sin t \\ y(t) = \pm a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) \end{cases} ; \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2},$$

feito ao que puideramos tamén chegar por outro camiño.

Referímonos a calcular a curvatura mediante a expresión  $\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$ , sen máis que tomar

$$\vec{r}(t) = \left( a \operatorname{sen} t, a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) \right)$$
 para acomodo á tractriz.

Para rematar esta relación de características, unhas máis e outras menos curiosas que ten a nosa curva, imos botar unha ollada á relación que ten con outra curva, esta máis popular nos ámbitos matemáticos. Referímonos á catenaria. En efecto, catenaria e tractriz están vinculadas porque a catenaria é a evoluta da tractriz e, en reciprocidade, a tractriz é a evolvente –lugar xeométrico dos centros de curvatura ou envolvente das normais– da catenaria (figura 8).

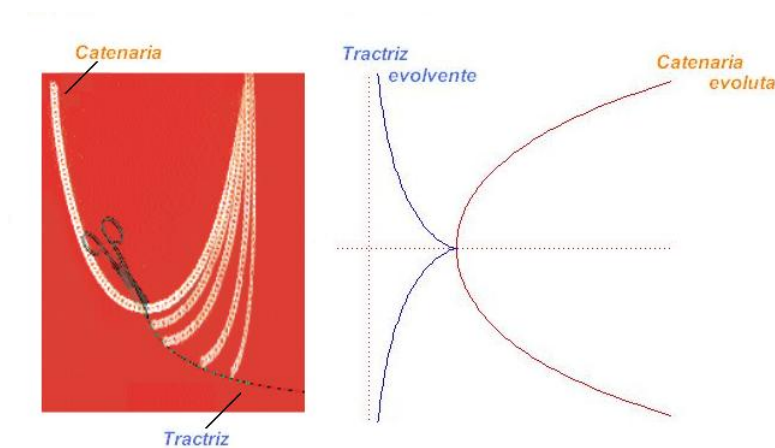


Figura 8: Se colgamos unha cadea polos seus extremos, a forma que adopta é a da curva catenaria. Cortando a cadea polo punto inferior, o seu punto medio, o extremo de cada brazo da mesma debuxará precisamente unha tractriz.

Lembremos de novo que a evoluta (catenaria) é o lugar xeométrico dos centros de curvatura da súa curva evolvente, a tractriz neste caso. O punto de partida para comprobar o feito será a catenaria que, na posición da dereita na figura 8, virá dada polas ecuacións:

$$c(\theta) \equiv \begin{cases} x(\theta) = \cosh \theta \\ y(\theta) = \theta \end{cases}$$

Lembremos igualmente que, dada a curva  $c(\theta)$ , a súa evolvente  $\alpha(\theta)$  determínase do xeito:

$$\alpha(\theta) = c(\theta) - s(\theta) \frac{c'(\theta)}{\|c'(\theta)\|},$$

tendo presente que  $s(\theta)$  representa a lonxitude de arco<sup>4</sup>.

Admitido o feito anterior, precisamente comezaremos por calcular a lonxitude de arco.

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi)} d\xi = \int_0^\theta \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(\xi)} d\xi = \int_0^\theta \cosh \xi d\xi = \operatorname{senh}(\theta).$$



Agora non queda máis que substituír na expresión de  $\alpha(\theta)$ , e realizar algunha sinxela operación.

$$\alpha(\theta) = (\cosh \theta, \theta) - \frac{\sinh \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} (\sinh \theta, 1) = (\cosh \theta, \theta) - \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} (\sinh \theta, 1) = \left( \frac{1}{\cosh \theta}, \theta - \tanh \theta \right)$$

Polo tanto, como  $\alpha(\theta) \equiv \begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{\cosh \theta} \\ y(\theta) = \theta - \tanh \theta \end{cases}$  representa a segunda das parametrizacións<sup>5</sup> dadas ao principio para a tractriz, queda probado que é a evolvente da catenaria.

### Contradiciendo a Euclides

Deixamos para o final deste relato matemático sobre a tractriz a súa propiedade máis destacada. Se as características descritas no epígrafe anterior non deixan todas de ter interese, iso si, cada unha en distinto grao, non hai discusión en canto a cal é a súa característica de máis transcendencia matemática, xeométrica para máis precisión. Esta non é outra que a de ser a curva que xera unha superficie, a pseudoesfera, que serve de modelo para a xeometría hiperbólica.

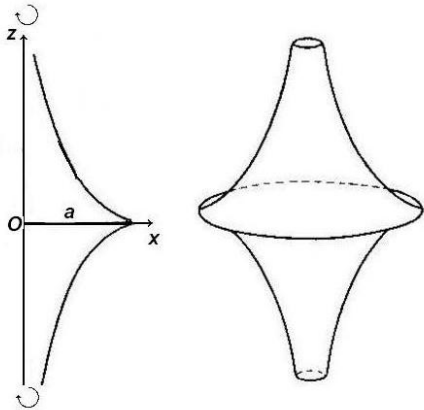


Figura 9: Ao xirar ao redor da súa asíntota, a tractriz xera a pseudoesfera.

Consideraremos a tractriz situada no plano  $OXZ$  (figura 9), de xeito que, usando as mesmas funcións hiperbólicas que xa viramos, as súas ecuacións paramétricas cartesianas en tres dimensións expresaranse do modo:

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = a \operatorname{sech} \theta \\ y(\theta) = 0 \\ z(\theta) = a(\theta - \tanh \theta) \end{cases}$$

Teremos presente tamén que dada unha curva calquera,  $\beta(u) = (x(u), y(u), z(u))$ , a superficie de revolución que xera ao xirar en torno a  $OZ$  vén dada polas ecuacións paramétricas:

$$s(u, \phi) = \begin{cases} x = x(u) \cos \phi - y(u) \sin \phi \\ y = x(u) \sin \phi + y(u) \cos \phi \\ z = z(u) \end{cases}$$

Na expresión anterior, o parámetro  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) representa o ángulo de xiro. No caso da pseudoesfera, superficie de revolución ao xirar a tractriz ao redor do eixe  $OZ$ , á vez asíntota da mesma (figura 9), teremos as seguintes ecuacións paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \operatorname{sech} \theta \cos \phi \\ y(\theta) = a \operatorname{sech} \theta \sin \phi \\ z(\theta) = a(\theta - \tanh \theta) \end{cases}$$

Se quixésemos obter a ecuación cartesiana da pseudoesfera, eliminamos o parámetro  $\phi$  entre as dúas primeiras ecuacións mediante a relación  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ , que nos leva a  $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{sech}^2 \theta$ . Combinando esta ecuación coa expresión de  $z(\theta)$ , tendo presente que  $\operatorname{sech}^2 \theta = 1 - \tanh^2 \theta$ , podemos tamén eliminar  $\theta$ . A ecuación cartesiana final que resulta para a pseudoesfera é:

$$z = \pm \left[ a \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \right]$$

Se usásemos para a tractriz, tamén no plano  $OXZ$ , a outra parametrización,

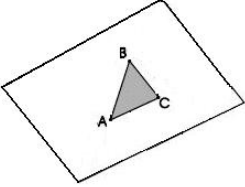
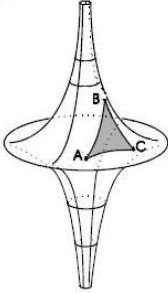
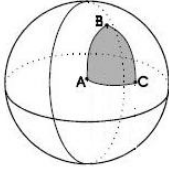
$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen} t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \pm a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) \end{cases}$$

resultarían as seguintes ecuacións para a pseudoesfera:

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen} t \cos \phi \\ y(t) = a \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \phi \\ z(t) = \pm a \left( \cos t + \ln \left( \tan \frac{t}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Até aquí nada de particular na pseudoesfera. Non é máis que unha superficie de revolución obtida polo xiro dunha curva plana, a tractriz. O verdadeiramente salientable da pseudoesfera é unha característica descuberta por Beltrami, matemático italiano sempre interesado nas xeometrías non euclidianas. No ano 1868, Beltrami atoparía na pseudoesfera un modelo para a xeometría hiperbólica, coñecida tamén como xeometría de Lobachevski<sup>6</sup>, na honra deste matemático ruso estudoso da devandita xeometría. O feito de que a pseudoesfera sexa un modelo para esta modalidade de xeometría revaloriza á tractriz, xa que o feito de orixinar a pseudoesfera ten unha relevancia superior ás propiedades descritas anteriormente. Pensemos que o asunto do quinto postulado, formulado por Euclides no século IV a.C. nos *Elementos*, centrou o interese dos matemáticos durante un longuísimos período da historia. Do avance logrado ao redor das xeometrías non euclidianas na época que lle toca vivir a Beltrami dá conta Hilbert que, xa no século XX, afirmaba fora “o máis notable e suxestivo resultado obtido no século pasado”.

Na clasificación de Klein, as xeometrías divídense en euclidianas e non euclidianas, segundo cumplan ou non o V postulado. A xeometría euclidiana verifícase sobre unha superficie de curvatura nula e, nela, a suma dos ángulos dun triángulo é  $180^\circ$ . A xeometría hiperbólica verifícase sobre unha superficie de curvatura constante negativa e, sobre ela, a suma dos ángulos dun triángulo é menor que  $180^\circ$ . Finalmente, na xeometría elíptica a suma dos ángulos dun triángulo é maior que  $180^\circ$  e verifícase sobre unha superficie de curvatura constante positiva. Na táboa seguinte aparecen esquematizadas as características de cada unha das tres xeometrías.

Xeometría euclidiana	Xeometría hiperbólica	Xeometría elíptica
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Dada unha recta <math>r</math> e un punto <math>P</math>, exterior a ela, existe unha única recta paralela a <math>r</math> que pasa polo punto <math>P</math>.</li> <li>■ A suma dos ángulos dun triángulo é <math>180^\circ</math>.</li> <li>■ Verifícase nunha superficie de curvatura nula.</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p><math>\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ</math></p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Dada unha recta <math>r</math> e un punto <math>P</math>, exterior a ela, existen cando menos dúas rectas distintas paralelas a <math>r</math> e que pasan polo punto <math>P</math>.</li> <li>■ A suma dos ángulos dun triángulo é menor que <math>180^\circ</math>.</li> <li>■ Verifícase sobre unha superficie de curvatura negativa.</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p><math>\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &lt; 180^\circ</math></p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Dada unha recta <math>r</math> e un punto <math>P</math>, exterior a ela, todas as rectas que pasan por <math>P</math> cortan á recta <math>r</math>.</li> <li>■ A suma dos ángulos dun triángulo é maior que <math>180^\circ</math>.</li> <li>■ Verifícase sobre unha superficie de curvatura positiva.</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p><math>\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &gt; 180^\circ</math></p> </div>

Convén aclarar que, cando se alude ao termo curvatura, nos referimos á coñecida como curvatura de Gauss (1777-1855), ideada por este personaxe, ao que posiblemente o lector botaría en falta nun asunto que se conclúe pouco despois da época que lle tocara vivir. O interese da curvatura de Gauss xustifícase polo carácter intrínseco da mesma, o que significa manterse invariante mediante calquera isometría<sup>7</sup> que apliquemos á superficie e, polo tanto, en calquera reparametrización da mesma.

Tanto a curvatura de Gauss ( $K$ ) como a curvatura media ( $H$ ) poden ser calculadas a partir das curvaturas das direccións principais da superficie:  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ . Dado un punto  $P$  da superficie, a primeira condición para representar unha dirección principal é a de ser unha curva obtida como intersección da propia superficie cun plano normal en  $P$ . Nese punto  $P$ , entre todas as curvas que cumpran a condición anterior, as direccións principais serán aquelas dúas curvas nas que a curvatura normal sexa mínima e máxima, respectivamente. A partir delas, a curvatura de Gauss e a media, poden calcularse do xeito:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \qquad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} .$$

A curvatura de Gauss non varía coa orientación elixida para a superficie mentres que na curvatura media cambia o signo, razón pola que  $H$  non ten a característica da invariancia que cumpre  $K$ . Desta forma, o plano, modelo para a xeometría euclidiana, verifica  $K = 0$  e, asemade,  $H = 0$ . Por outro lado, o cilindro tamén se pode considerar como modelo para a xeometría de Euclides, xa que  $K = 0$ , porén, neste caso,  $H \neq 0$ .

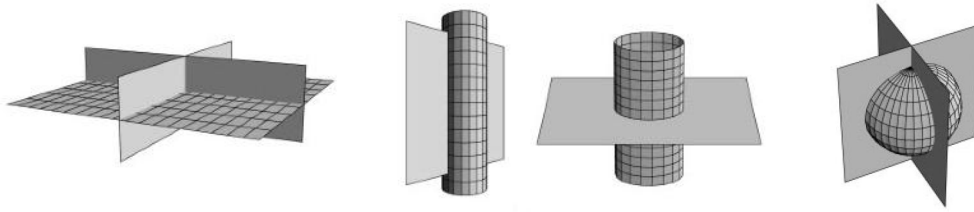


Figura 10

No caso do plano, calquera sección normal é unha recta. Polo tanto, as súas curvaturas principais son nulas:  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ , de xeito que  $K = H = 0$ . Pero, no cilindro, as direccións principais son rectas:  $\kappa_1 = 0$ , e circunferencias:  $\kappa_2 = \frac{1}{r}$  ( $r$ , radio do cilindro). Polo tanto,  $K = 0$ , pero  $H = \frac{1}{2r}$ . Como  $K = 0$  nos dous casos, ambas as superficies representan outros tantos modelos para a xeometría euclidiana.

Para a esfera, dáse a circunstancia de que todas as seccións normais son circunferencias máximas, co mesmo radio que a esfera,  $r$ . Polo tanto, a curvatura de calquera sección normal será sempre  $\frac{1}{r}$ . En particular, as direccións principais tamén cumpriran a condición, é dicir,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{r}$ . O que supón que  $K = \frac{1}{r^2} > 0$ , curvatura de Gauss constante e positiva, resultado que xustifica que a superficie da esfera sirva de modelo para a xeometría elíptica.

Falta por examinar o caso que máis nos interesa pola intervención da tractriz, o da xeometría elíptica, que esixe para a súa verificación unha superficie con curvatura constante e negativa, momento en que entra na escena a pseudoesfera.

Para calquera punto  $P$  sobre esta superficie a curvatura de Gauss ten signo negativo, xa que se nos fixamos nas direccións principais (figura 11) as orientacións de ambos os respectivos radios de curvatura son opostas. Ademais, en base á parametrización anterior, pódese probar<sup>8</sup> que o valor da curvatura é  $K = -\frac{1}{a^2}$ , expresión na que  $a$  representa o radio da pseudoesfera. En consecuencia, esta superficie supón un modelo para a xeometría hiperbólica e, polo tanto, a suma dos ángulos internos dun triángulo sobre a mesma non chega a ser  $180^\circ$ .

En suma, a curva do can, cando xira arredor da asíntota, xera unha superficie sobre a que ten lugar a xeometría de Lobachevski ou xeometría hiperbólica, feito que pon en valor o papel da tractriz no mundo xeométrico.

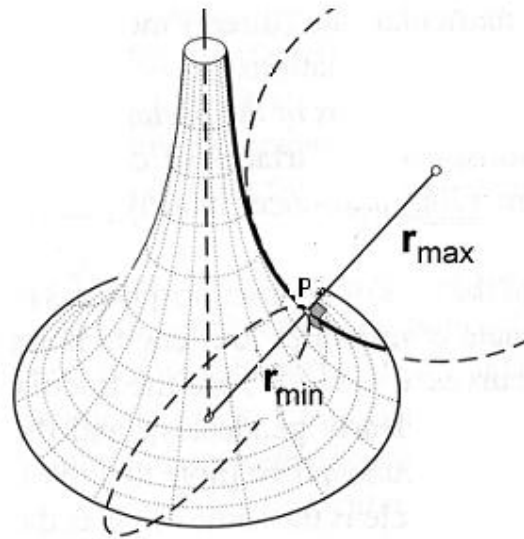


Figura 11

## Referencias bibliográficas

- [1] Aleksandrov, A. D.; Kolmogorov, A. N.; Laurentiev, M. A. et. al. (1976): *La matemática: su contenido, método y significado*, vol. 3, Madrid, Alianza.
- [2] Álvarez Pérez, J. M. (2006): *Curvas en la historia*, vol. 2, Madrid, Nivola.
- [3] Blumenthal, L. M. (1965): *Geometría axiomática*, Madrid, Aguilar.
- [4] Bolt, B. (1987): *Divertimentos matemáticos*, Barcelona, Labor.
- [5] Costa, A. F.; Gamboa, M.; Porto, A. M. (1997): *Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies*, Madrid, Sanz y Torres.
- [6] Fernández, S. (2004): *Lobachevski: Un espíritu indomable*, Madrid, Nivola.
- [7] Fernández García, M. de C. (2007): "Galería de curvas en el plano", *Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático*, 24(3).
- [8] Lipschutz, M. (1971): *Geometría diferencial*, México, Mc Graw-Hill.
- [9] Klingenberg, W. (1978): *Curso de geometría diferencial*, Madrid, Alhambra.
- [10] Smorgorhevski, A. S. (1984): *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Moscú, Mir.
- [11] Struik, D.J. (1966): *Geometría diferencial clásica*, Madrid, Aguilar.

## Referencias en liña

- [1] Premio Abel 2009. Disponible en: <https://abelprize.no/abel-prize-laureates/2009>
- [2] Accinelli, J. (2003): *Acerca de la Exposición: Introducción a las Geometrías No Euclidianas*, Instituto Superior Fundación Suzuki.  
Disponible en: <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/1342671.pdf>
- [3] Alías Linares, L. J. (2002): *El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura constante*, Conferencia pronunciada con motivo de la concesión a del Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia 2002 convocado por la Fundación Séneca, Agencia Regional de Ciencia y Tecnología. Disponible en: <https://fseneca.es/seneca/doc/pub/matematicas.pdf>
- [4] Apostol, T. M. (2000): *A Visual approach to Calculus problems*, California Institute of Technology.  
Disponible en: <http://www.its.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html>
- [5] Castellano, G. (2013): *¿Qué matemáticas tienen en común un perro, un remolque, el Universo y un edredón?*, TVE, La 2, La aventura del saber.  
Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=OpIvkK5JJkE>
- [6] Ciaurri Ramírez, O. (2013): *Instantáneas diferenciales*, Material didáctico de Matemáticas, Universidad de la Rioja. Disponible en: <http://dialnet.unirioja.es/descarga/libro/528070.pdf>
- [7] Ferréol, R. y J. Mandonnet (2007): *todo xénero de curvas en dous ou tres dimensións*.  
Disponible en: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/tractrice/tractrice.shtml>
- [8] Gallardo, J. M. (2012): *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Una introducción con SAGE*.  
Disponible nesta ligazón.

- [9] García Río, E. (2002/03): *Una introducción a la curvatura*, Unha Andaina pola Matemática, Una introducción a la curvatura, divulgaMAT. [Dispoñible nesta ligazón.](#)
- [10] Lafuente, J. (1998): *Geometría diferencial de curvas en el plano*. [Dispoñible nesta ligazón.](#)
- [11] Martínez de la Rosa, F. (2014): “*Recursos para el cálculo visual de integrales*”, Educación matemática, vol. 26, 1, Grupo Santillana, DF México.  
Dispoñible en: <http://www.redalyc.org/pdf/405/40531694007.pdf>
- [12] Montesdecoa, A. (2004): *Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*.  
Dispoñible en: <http://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf>
- [13] Rodríguez Santos, A. (2011): *Epsiclas, Geometrías no euclídeas*. [Dispoñible nesta ligazón.](#)
- [14] Rengifo Muñoz, E. R. (2012): *Cadena colgante, curvas de persecución*.  
Dispoñible en: <https://prezi.com/bb216eld4gbh/cadena-colgante-curvas-de-persecucion/>
- [15] Rubio, M. (2003): *Curvas: tractriz*, Epsilones.  
Dispoñible en: <http://www.epsilon.es/paginas/curvas/curvas-015-tractriz.html>
- [16] Seara da Ciéncia, Universidade Federal do Ceará (2015): *Apostilas sobre as geometrias gão-euclidianas*, Apostilas eletrônicas de Dona Fifi. [Dispoñible nesta ligazón.](#)
- [17] University of St Andrews, School of Mathematics and Statistics, (2015): *The MacTutor History of Mathematics archive, Curves: tractrix*.  
Dispoñible en: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Tractrix/>

## Notas

1. Claude Perrault (1613-1688), arquitecto, físico, mecánico, médico e naturalista francés era, ademais de membro da Academia de Ciencias, irmán de Charles Perrault, autor de contos como *Carapuchiña Vermella*.
2. Leibniz fai mención do seu encontro no ano citado, 1693, momento en que Perrault lle formula o problema aludido. Do comentario de Leibniz dedúcese que xa fora formulado anteriormente a outros matemáticos, Newton entre eles. Posteriormente descubriríase que Newton xa determinara a curva en 1676.
3. Unha cuestión, obviada case sempre tanto nos libros como nas páxinas de Internet, é que para calcular unha primitiva da cosecante, convén multiplicala e dividila previamente pola suma de cosecante e cotanxente. A sinxela transformación anterior permite visualizar un logaritmo como solución inmediata da mesma.
4. Unha completa explicación deste feito, tan detallada como rigorosa, podémola atopar en [10]
5. Obsérvase que, por simplicidade, tomamos  $a = 1$  en todo o desenvolvemento.
6. Klein (1849-1925) foi o que unificou os nomes das diferentes xeometrías en canto á verificación do quinto postulado: hiperbólica, elíptica e parabólica. Chamou hiperbólica á xeometría orixinal de Saccheri, Gauss, Bolyai e Lobachevski, elíptica á xeometría sen paralelas, e parabólica á xeometría euclidiana. Klein idearía tamén un modelo para a xeometría de Lobachevski, usando o círculo como plano e as cordas como rectas do mesmo.
7. A Xeometría Diferencial ocúpase das variedades, estruturas coas condicións mínimas para facer posible nelas o cálculo infinitesimal e nas que, ademais, tense o concepto de ortogonalidade. As transformacións compatibles con esta estrutura son aquelas funcións diferenciables que conservan o produto escalar, funcións que se chaman isometrías. Entre todas as propiedades importantes que permanecen invariantes as isometrías, a fundamental é a curvatura.

8. A partir dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, unha demostración deste feito atópase, por exemplo, en Klingenberg (1978). Para outro tipo de proba, entre innumerables posibilidades, os interesados poden consultar <http://mathworld.wolfram.com/Pseudosphere.html>. Pódense probar igualmente outras cuestións ao redor da pseudoesfera. Así, a superficie da mesma é  $4\pi a^2$ , igual que o da esfera, e o seu volume  $\frac{2\pi a^3}{3}$ , a metade do da esfera. Só estas analoxías xustifican o nome dado a esta superficie.

**Luis Puig Mosquera**

*Profesor xubilado*

<[luispuig@edu.xunta.gal](mailto:luispuig@edu.xunta.gal)>