GAMMA 14
colaboracións feb. 2024

Unha viaxe polo currículo canadense

Cesar Docanto Vázquez
Andrés E. Cabana González

Neste artigo pretendemos dar unha visión global tanto do currículo canadense, fundamentalmente na etapa da "High School", como da forma de facer no proceso de ensino-aprendizaxe nas escolas de educación secundaria de Canadá. A idea é poder comparar o seu modelo de ensino das matemáticas co noso. A maiores, damos un par de detalles ao respecto das ferramentas tecnolóxicas máis empregadas na provincia de Ontario para o ensino dos diferentes bloques matemáticos e deixamos un debate aberto en relación a que sistema de ensino das matemáticas é mellor

Palabras chave: Currículo, Matemáticas, Canadá, Sistema Educativo, PIALE.

A Journey Through the Canadian Curriculum
In this article we intend to give an overview of both the Canadian curriculum, mainly at the High School level, and the way of doing the teaching-learning process in Canadian secondary schools. The idea is to compare their mathematics teaching model with ours. Moreover, we give a couple of details about the most used technological tools in the province of Ontario for the teaching of the different mathematical strands and we leave an open debate about which mathematics teaching system is the best.

Keywords: Curriculum, Mathematics, Canada, Education System, PIALE.

A idea da redacción deste artigo xorde trala nosa participación no programa PIALE, programa desenvolvido entre o 12 de outubro e o 9 de novembro de 2022 en Ottawa (Canadá).

O noso obxectivo, a priori, non era só facer a inmersión lingüística que o programa PIALE propón, senón tamén comparar os sistemas educativos centrándonos, fundamentalmente, na forma de ensinar matemáticas e contrastala co que nós facemos nas nosas aulas día a día.

Neste sentido, cabe destacar que a principal característica do ensino das matemáticas canadense baséase na aplicación dos contidos traballados, se ben hai que dicir que a base destes contidos é eminentemente memorística. Non se traballan o rigor, a dedución lóxica nin a formalización matemática dun xeito similar ao que nós facemos, sobre todo a partir de 4.º ESO e nos cursos de Bacharelato, senón que tenden a aplicar regras memorísticas e mnemotécnicas para a maioría dos conceptos. Nos seguintes epígrafes do artigo centrarémonos en confrontar os currículos (máis que confrontar dar unhas pinceladas do currículo canadense, xa que o noso é de todas e todos coñecido) e daremos algúns exemplos nos que se pon de manifesto a súa forma de enfocar e aplicar determinados aspectos do currículo.

Comparando currículos

Ímonos centrar, principalmente, na parte coa que estamos máis familiarizados, que é a que corresponde ao ensino secundario. De feito, os nosos destinos en Canadá foron dous centros de educación secundaria. No sistema educativo da provincia de Ontario (ao igual que sucede en España, as competencias en educación están transferidas a cada provincia) as materias de matemáticas, ao longo de todo o ensino secundario organízanse do seguinte xeito:

Curso Grao	Nivel educativo	Correspondencia co noso SE	Nome da materia
7	Intermediate	1.º ESO	Mathematics
8	Intermediate	2.º ESO	Mathematics
9	High School	3.º ESO	Destreamed Mathematics
			Locally Developed Mathematics (non en todos os centros)
10	High School	4.º ESO	Principes of Mathematics (Academic)
			Destreamed Mathematics (Applied)
11	High School	1.º Bacharelato	Functions (University preparation)
			Functions and applications (University/College preparation)
			Foundations for College Mathematics (College preparation)
			Mathematics for Work and Every Life (workplace preparation)
12	High School	2.º Bacharelato	Advanced Functions (University preparation)
			Calculus and vectors (University preparation)
			Mathematics of Data Management (University preparation)
			Mathematics for College Technology (College preparation)
			Fundations for College Mathematics (College preparation)
			Mathematics for Work and Every Life (workplace preparation)

Cabe destacar que, como podemos observar na táboa, a partir do noso 3.º da ESO, pero especialmente nos graos 11 e 12, que é o que se corresponde co noso bacharelato, hai múltiples opcións de elección de créditos (o sistema educativo canadense funciona por créditos e non por materias).

Pero iso non é, se cabe, o máis salientable. O realmente diferente é que o alumnado da provincia de Ontario, para poder obter o seu "Diploma" necesita cursar como mínimo tres créditos de matemáticas durante toda a "High School" e, polo menos un deles, debe ser cursado entre os graos 11 e 12. Dito isto, só nos faltaría analizar un pouco polo miúdo o currículo de cada un deses créditos para que o lector poida facer as súas cábalas e todas as variantes que lle permita a combinatoria en relación á competencia matemática que pode acadar o alumnado canadense. Neste aspecto, é ben seguro que poderiamos atopar unha opinión diferente por cada persoa á que se lle pregunte do que pensa ao respecto de fraccionar as matemáticas en créditos que abranguen diferentes saberes matemáticos sen que sexa obrigatorio cursar o conxunto de todos estes saberes nun só crédito ou materia tal e como se fai no sistema educativo español (e galego, no noso caso).

Queremos facervos partícipes, en todo caso, da resposta que deu unha alumna canadense cando, durante a nosa estancia, expuxemos a diferenza dos dous sistemas educativos e preguntamos cal dos dous pensaban que era mellor para a súa preparación de cara ao futuro. Esta rapaza comentou que dependía das expectativas de futuro de cada un. Literalmente dixo: "Depende do que queiras facer. Se queres facer unha carreira como Matemáticas na que necesitas saber de todas as partes das matemáticas, o sistema español é mellor. Pero se queres facer algo máis específico no que só necesitas unha parte concreta das matemáticas, o sistema canadense é mellor". Aí deixamos esa reflexión para que, como diciamos no parágrafo anterior cada lector faga a súa propia composición de lugar.

Non queremos deixar de comentar que, só nos graos 7 e 8, os currículos son parecidos, en canto a bloques de contido e competencias a desenvolver, ao noso currículo de 1.º e 2.º de ESO. E indicar, a maiores, que no currículo canadense aparece unha das competencias que máis polémica trouxo co cambio de currículo no sistema educativo español: a competencia emocional no currículo das matemáticas. Nos seus textos legais esta competencia aparece como "Habilidades de aprendizaxe socioemocional en matemáticas e procesos matemáticos".

Outra diferenza que puidemos percibir durante a nosa estancia ten que ver co momento de impartir os contidos. Dunha forma xenérica, puidemos observar que no sistema educativo canadense os contidos se imparten un curso por detrás ao sistema educativo español. Isto é: contidos que nós, habitualmente, impartimos en 4.º de ESO, alí impártenos en grao 11. En todo caso, repetimos que isto hai que tomalo como referencia, non como dato 100 % preciso.

Facer un detalle máis pormenorizado de todo o currículo implicaría unha extensión fóra do normal para este artigo. É por iso que, para aquelas persoas que queiran profundizar máis no coñecemento do currículo dos diferentes créditos impartidos no sistema educativo canadense, deixamos as seguintes ligazóns que levan, directamente, a eses currículos:

https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/elementary-mathematics

https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/secondary-mathematics

Algúns exemplos de como fan matemáticas

Os exemplos nos que nos imos centrar corresponden ao seu High School, isto é, os nosos 3.º e 4.º da ESO e 1.º e 2.º de Bacharelato e aínda que podemos ver que se introducen conceptos de forma máis tardía a como o facemos no noso país, estes sempre van acompañados dunha aplicación práctica. Tamén hai que mencionar que o seu estudo das matemáticas faise arredor do estudo das funcións, aspecto que se fai máis salientable nos seus graos 10.º, 11.º e 12.º. (4.º ESO, 1.º e 2.º Bac) . Por exemplo, eles non estudan logaritmos nin traballan ecuacións logarítmicas ata o estudo da función logarítmica, fano todo de maneira progresiva ata rematar modelizando situacións susceptibles de facerse cunha función logarítmica. É curioso tamén que este estudo faise nunha materia distinta da que se estudaron as potencias, ecuacións exponenciais e funcións exponenciais que seguen unha secuencia similar no seu estudo. Si traballan no tema da función logarítmica a relación desta función coa exponencial pero non se fala nin de composición nin de función inversa dun xeito formal como aquela función que ao compoñela coa súa correspondente dá a identidade.

Outro exemplo de que as funcións son o eixe vertebrador do seu ensino está nos nomes que a materia de matemáticas ten en Canadá no itinerario da Universidade nos graos 11 e 12: “Funcións” (grao 11), “Funcións avanzadas” (1.º cuadrimestre grao 12), “Cálculo e vectores”(2.º cuadrimestre grao 12).

Centrémonos xa nuns cantos exemplos:

- Modelización con funcións sinusoidais

  O estudo das funcións trigonométricas empézase en Canadá no grao 11 tomando como unidade de medida o grao sexaxesimal, estudo que se repite na súa totalidade no grao 12 usando o radián como medida. Cómpre dicir que o estudo das funcións en Canadá comeza no grao 8 coa función lineal pero cun tratamento relacionado coa relación de linealidade de dúas magnitudes nas que é posible escribir unha expresión alxébrica que as relaciona, continuando coa función cadrática e as exponenciais. Agás no caso das funcións lineais trabállase coas funcións na forma $a\,f\Big(k(x-d)\Big)+c$, xa que consideran moi importante no estudo das funcións as transformacións a partir da función modelo, xa sexa x^2, a^x, $\operatorname{sen}(x)$,..., transformacións que despois usarán para a modelización.

  Previamente a esta modelización, estudan as características das funcións seno e coseno dun xeito moi teórico e usando apenas software informático para obter as conclusións e definen os conceptos de amplitude, eixe, ciclo, período e fase nestas funcións modelos e os relacionan cos parámetros a, k, d e c que proporcionan a transformación.

  A información proporcionada redúcese basicamente a:

  - Todas as funcións sinusoidais pódense escribir como unha fase da función seno, e polo tanto teñen a forma $f(x)=a\ \operatorname{sen}\Big(k\,(x-d)\Big)+c$.
  - **Eixe da función:** Recta horizontal respecto da cal a función se despraza. $y=\dfrac{\text{máx}+\text{mín}}{2}$. Este valor é c.
  - **Amplitude:** Distancia do eixe a un extremo. $y=\dfrac{\text{máx}-\text{mín}}{2}$. Este é o valor de $|a|$.
  - **Período:** A lonxitude que corresponde a una repetición. Denomínase **ciclo** á parte da gráfica que corresponde a un período $T=\dfrac{2\,\pi}{k}$, onde o número de ciclos en $2\,\pi$ radiáns é $|k|$.
  - **Fase:** É o punto de comezo do ciclo máis preto ao 0. Esta é a translación horizontal, d.

  Coñecidas estas relacións, representan calquera tipo de función trigonométrica directa.

Un peso está suxeito a un resorte. O peso descansa 50 cm sobre un taboleiro. Estírase o peso cara abaixo 25 cm e ao soltalo comézase a contar o tempo ($t = 0$). Isto crea un movemento periódico arriba e abaixo. Sabendo que o peso tarda 1,6 segundos en volver á posición inicial, determina a ecuación sinusoidal que modeliza a altura do peso con respecto ao tempo.
Temos por tanto que os parámetros neste caso son: $|a| = 25$, xa que o peso estírase 25 cm desde a súa posición inicial, $c = 50$ porque é altura do peso en repouso sobre o taboleiro.
O período é $T = 1,6$ s, entón tanto para a función seno como coseno $k = \dfrac{2\,\pi}{1,6} = \dfrac{5\,\pi}{4}$, e considerando de novo o comezo no punto máis baixo podemos tomar a reflexión do coseno para que o valor da fase sexa $d = 0$ con $a = -25$.
A función que modeliza é polo tanto: $f(x) = -25\,\cos\left(\dfrac{5\,\pi}{4}x\right) + 50$.

No traballo con funcións trigonométricas tamén fan a representación de funcións trigonométricas inversas e das súas transformadas. Neste caso parten igualmente dos modelos de funcións trigonométricas directas e do estudo previo da representación dunha función recíproca que xa comezan no grao 11 representando funcións recíprocas de funcións cadráticas.

- Factorización de trinomios de 2.º grao

No ensino das matemáticas de 2.º da ESO (grao 7 en Canadá) traballanse as operacións de suma, resta e multiplicación de polinomios e insístese na extracción de factor común, para en 3.º ESO (grao 8) revisar estas operacións, engadir a división e facer a factorización de polinomios sinxelos que se completará en 4.º ESO coa aparición de raíces de todo tipo nos polinomios.

No ensino canadense, a operativa con estas expresións faise dun xeito secundario e sempre xunguido a exemplos reais como veremos no seguinte e último exemplo ou como na caso da división, como unha conta auxiliar que permite determinar as asíntotas oblicuas dunha función racional no seu grao 11. Porén, a factorización de polinomios de grao 2 do tipo $a\,x^2 + b\,x + c$, con $a \neq 0$, é un dos eixes centrais do curso "Principios de matemáticas" do grao 10, no que desenvolven a fórmula mnemotécnica coñecida como MAN ou MacMAN que repetirán coma un mantra nos graos 11 e 12. O uso da fórmula da ecuación de segundo grao para atopar as raíces e despois factorizar o polinomio é residual e restrínxese a números grandes. É máis, a resolución de ecuación de segundo grao fana utilizando este método.

O nome do método como xa se pode intuír fai alusión aos pasos que se deben seguir para obter os números que permitirán factorizar o polinomio:

M (multiplication), A(addition), N(numbers). A inclusión de ac fai alusión ao produto dos coeficientes do polinomio de grao 2.

En definitiva, baixo o epígrafe de "Como factorizar un trinomio" atoparemos os seguintes pasos:

1. Comproba se o polinomio ten algún factor común, e se é así extráeo. Se o coeficiente de x^2 é negativo saca o signo menos factor común.
2. Asegúrate que os termos están na forma: $a\,x^2 + b\,x + c$
3. Aplica o método MAN consistente en atopar dous números tales que
   a) Multiplicados xuntos sexan igual ao produto dos coeficentes a e c.
   b) Sumando todos xuntos son iguais ao coeficiente b.
4. Divide os ditos números polo valor de a e simplifica se é posible.

Estes números son os que debes poñer entre paréntese na factorización no caso de raíces enteiras. No caso de fraccionarias o denominador é o coeficiente do termo en x e o numerador o termo independente. Isto aplícano sen ningunha explicación adicional sobre a relación entre raíz e factor.

Nun primeiro momento podemos pensar que é un método baseado nas fórmulas de Cardano-Viéte e non está lonxe delas pero o fundamento do mesmo é moito máis sinxelo xa que se basea no resultado de multiplicar os factores $(x-n_1)\cdot(x-n_2)$.

Factoriza os seguintes trinomios:

a) $x^2+7\,x+12\ (a=1\,,\ b=7\,,\ c=12)$

$$\left.\begin{array}{l} M=12\,(a\cdot c) \\ A=7\,(b) \end{array}\right\} \text{Os números son 3 e 4. Polo tanto, } N=\frac{3}{1}=3 \text{ e } \frac{4}{1}=4$$

$x^2+7\,x+12=(x+3)\cdot(x+4)$

b) $-8\,x^2+38\,x+10=-2\cdot\big(4\,x^2-19\,x-5\big)\ (a=4\,,\ b=-19\,,\ c=-5)$

$$\left.\begin{array}{l} M=-20\,(a\cdot c) \\ A=-19\,(b) \end{array}\right\} \text{Os números son 1 e -20. Polo tanto, } N=\frac{1}{4} \text{ e } \frac{-20}{4}=-5$$

$-8\,x^2+38\,x+10=-2\cdot\big(4\,x^2-19\,x-5\big)=-2\cdot(4\,x+1)(x-5)$

A traxectoria dunha lanzadeira de xoguete é, $h=-2\,d^2+24\,d+90$, donde d é a distancia horizontal en metros desde o muro e h é a altura en centímetros sobre o chan.

a) Determina as características da función cadrática.

b) Usa ditas características para esbozar a gráfica da traxectoria da lanzadeira. (Etiqueta os eixes pero a gráfica non necesita ter escala).

c) Á vista das características e da gráfica, resposta ás seguintes cuestións:

- c_1) Desde que altura é lanzado o xoguete?
- c_2) A que distancia do muro está a lanzadeira cando cae ao chan?
- c_3) Cal é a máxima altura que alcanza?
- c_4) Como de lonxe, horizontalmente, está do muro cando alcanza a máxima altura?

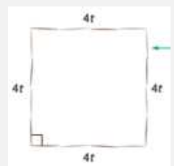
Cabe dicir que despois da factorización polo método MAN tamén traballan a fórmula de suma por diferenza para poder factorizar expresión do tipo $y=4\,x^2-16$, sobre as expresión do tipo $y=a\,x^2+c$, $c>0$, limítanse a dicir que non se pode factorizar sen dar ningunha explicación máis, non sendo susceptibles de ser traballadas neste curso, así como todas aquelas expresións $y=a\,x^2+b\,x+c$ que non teñen raíces reais.

- Tratamento das expresións alxébricas e os polinomios

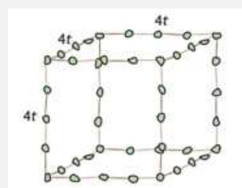
Non fan un traballo exhaustivo de operacións e propiedades dos polinomios como podemos facer no noso sistemas educativo. O seu estudo introdúceno no seu grao 9 e vai parello ao estudo das potencias no caso de produto e cociente de monomios. A continuación si introducen os polinomios con unha indeterminada e como moito un termo en xy usando a técnica dos "tiles".

Xosé está tendo dificultade para entender a diferenza entre $4\,t$, $(4\,t)^2$ e $(4\,t)^3$. Como podería o seu amigo Pedro modelizar estas expresións para axudarlle a entender a diferenza?
Pedro usa os escarvadentes para explicarlle as diferenzas e constrúe os seguintes modelos:
$4\,t$: Se cada escarvadentes representa a lonxitude de t, poñendo catro nunha fila temos $4\,t$:

$(4\,t)^2$: Como coñecemos que a área do cadrado é o cadrado do seu lado, construíndo o cadrado de lado $4\,t$ teremos representado este modelo:



$(4\,t)^3$: Agora se utilizamos que o volume dun cubo é o cubo da súa aresta, podemos representar este termo cun cubo de aresta $4\,t$:



Deste xeito relacionan estas expresións ata grao 3 coa súa representación e tamén aproveitan para falar de dimensións 1, 2 e 3. Porén, non se indica a diferenza que pode haber con expresións similares como $4\,t^2$ ou $4\,t^3$ ou as posibles equivalencias con $16\,t^2$ ou $64\,t^3$.

Por último, indicar que aínda que non inciden nas operacións con polinomios, si utilizan numerosos exemplos para traballar con eles. Xustamente é isto no que basean o estudo dos polinomios.

Ferramentas dixitais

Curiosamente, e aínda que moitos alumnos e alumnas contan con ordenador de seu ou, senón, hai ordenadores dispoñibles para o seu uso, o estudo de funcións non o fan usando ningún software de xeometría dinámica como GeoGebra máis alá de breves explicacións por parte do docente. A ferramenta básica que, normalmente, usan para a visualización e traballo con funcións e con outros contidos matemáticos como factorización de polinomios, resolución de ecuacións etc é Desmos, ferramenta dispoñible para PC e app dispoñible para todo tipo de sistema operativo de dispositivos mobiles.

Ao respecto disto dicir que nos sorprendeu, precisamente, o pouco ou nulo uso que fan de GeoGebra, xa que a nós parécenos unha ferramenta fundamental no desenvolvemento das nosas clases.

Conclusións

Despois de analizar, con detalle, a nosa experiencia, que vai máis alá do reflectido neste artigo, temos que concluír que é moi difícil para nós establecer un xuízo de valor acerca de que sistema educativo é máis beneficioso para o alumnado. Incluso entre nós mesmos temos as nosas discrepancias.

Se ben é certo que valoramos moi positivamente o feito de que, no sistema educativo canadense, o alumnado poida crear os seus propios itinerarios en función das súas expectativas futuras mentres que no noso sistema todo é bastante máis pechado (a pesares de que tamén existe optatividade de materias), tamén temos que salientar que pouco nos gusta o feito de que a aprendizaxe das matemáticas estea moi baseado en regras mnemotécnicas e pouco formais, o que cremos proporciona unha aprendizaxe menos profunda do saber matemático.

En calquera caso, tal e como se indicou máis arriba, cada quen que saque a súa propia conclusión. O debate está servido.

César Docanto Vázquez
IES David Buján (Cambre)
<cedoc76@gmail.com>

Andrés E. Cabana González
IES Salvaterra de Miño (Salvaterra de Miño)
<acabana68@gmail.com>