

# Árbores mínimas de Steiner con GeoGebra

IGNACIO LARROSA CAÑESTRO

## Nota previa

Todas as figuras do artigo están realizadas co coñecido programa de xeometría dinámica GeoGebra, que se pode descargar gratuitamente en liña en <https://www.geogebra.org/download>. Para a maior parte destas figuras [hai ligazóns](#)<sup>1</sup> que permiten manipulalas e/ou ver a súa construción paso a paso nun ficheiro HTML que se abre no navegador, e que require unha conexión a Internet aberta para conectar co sitio web de GeoGebra. [Nesta ligazón](#) atópanse todas as construcións correspondentes en applets GGB de GeoGebra. [Nesta ligazón](#) hai seis macros GGT de GeoGebra que facilitan a realización das construcións, e que se comentarán máis adiante. Ao abrir unha macro, a construción en curso non se altera e a macro pasa a estar dispoñible na barra de ferramentas.

## Introdución

Se se teñen  $n$  puntos no plano e se conectan todos uns cos outros mediante segmentos, temos o que se coñece como un **grafo** completo. O número de segmentos que conectan un punto coñécese como **orde** do punto. Nun grafo completo todos os puntos están conectados con todos os demais, de maneira que a lonxitude a percorrer dun punto calquera a outro é mínima: a distancia en liña recta entre eles. Pero esta é unha rede de segmentos notablemente redundante; existen moitas posibilidades para ir dun punto a outro, aínda que aumente algo a lonxitude a percorrer. Se os puntos representan, por exemplo, cidades e os segmentos estradas que os conectan, un grafo completo non parece unha alternativa viable, nin sequer desexable.

---

GeoGebra

---

Parece razoable preguntarse polo conxunto de segmentos de lonxitude total mínima que conectan todos os puntos, aínda que as conexións non sexan sempre directas. Se non se poden engadir puntos intermedios de enlace, a solución é o que se coñece como unha **árbore de expansión mínima**. Árbore, porque se a súa lonxitude ha de ser mínima non debe conter ciclos. Se hai un ciclo, sempre pode eliminarse unha das súas compoñentes para obter un grafo de lonxitude total menor que aínda interconecte todos os puntos.

Para determinar a árbore de expansión mínima dun conxunto de puntos, hai un algoritmo debido a Kruskal que o fai de forma eficiente. Trátase dun algoritmo de tipo “larpeiro”, que en cada paso trata de alcanzar a maior parte do obxectivo posible. Aquí o apelativo de “larpeiro” soa un pouco contradictorio, porque o que fai este algoritmo é ordenar as distancias entre todos os pares de puntos e trazar o segmento correspondente á máis curta, proseguindo coas demais en orde de lonxitude, sempre que a inclusión do segmento correspondente non dea lugar a un ciclo, neste caso sáltase e escóllese o seguinte. No caso da figura 1 escóllese os segmentos EA, AB, AD, sáltanse BD e ED porque cerrarían un ciclo e, finalmente, escóllese BC. Con  $n - 1$  segmentos resólvese o problema. **GeoGebra** impleméntao co comando `ÁrboreExpansiónMínima[ <lista de puntos> ]`.

A pregunta natural é se, engadindo puntos intermedios de enlace, pode acurtarse a lonxitude total. A resposta está nas **árbores de Steiner** (figura 2), nas que se engaden ata  $n - 2$  puntos auxiliares, **puntos de Steiner**, de maneira que a lonxitude total se reduza. Os puntos de partida adoitan denominarse entón **terminais**. O problema da **árbore mínima de Steiner** consiste en atopar o que ten lonxitude total mínima. Se resulta non conter puntos de Steiner, a árbore mínima de Steiner coincide coa árbore de expansión mínima. Se contén exactamente  $n - 2$  puntos de Steiner, dise que é **completa**. Neste caso, a orde dos terminais é sempre un, e a dos puntos de Steiner tres. O cociente entre a lonxitude da árbore mínima de Steiner e a da árbore de expansión mínima coñécese como **razón de Steiner  $q$  do conxunto de terminais**, e evidentemente sempre é menor ou igual que 1. En 1968, Edgar Gilbert e Henry Pollack conxecturaron que era sempre maior ou igual que  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025\dots$  [6]. Este valor alcánzase para os vértices dun triángulo equilátero, como veremos máis adiante. Esta conxectura foi finalmente probada por Ding Zhu Du e Frank Hwang [5]. Polo tanto, a árbore mínima de Steiner nunca acurta a lonxitude da árbore de expansión mínima en máis dun 13,4% aproximadamente. Non obstante, parece que a proba desta conxectura non está totalmente aceptada [8].

GeoGebra non ten un comando para construír árbores de Steiner, pero veremos como pode facerse. Con [este applet de GeoGebra](#) poden verse e manipularse as árbores das figuras 1 e 2.

O interese das árbores de Steiner é evidente no trazado de vías de comunicación ou liñas de subministración. Un exemplo típico son as configuracións en ‘Y’ dalgunhas autoestradas, como é o caso das que unen Avilés, Oviedo e Gijón en Asturias, ou trazados ferroviarios como o *Y vasco* de alta velocidade, unindo Vitoria, Bilbao e San Sebastián. Tamén se utilizou na construción de galerías

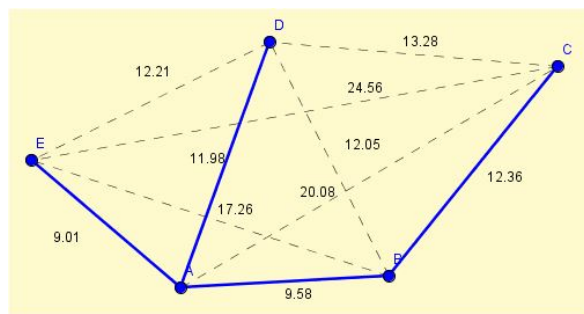


Figura 1: Árbore de expansión mínima.

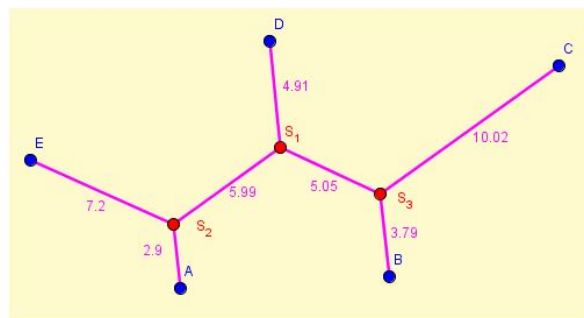


Figura 2: Árbore de Steiner.

mineiras, un problema neste caso tridimensional. Aínda que tamén ten aplicacións máis inesperadas, como en bioloxía evolutiva: os terminais serían secuencias de nucleótidos dun mesmo cromosoma en distintas especies, a distancia entre eles sería o número de desigualdades nas secuencias e os puntos de Steiner engadidos, os hipotéticos antepasados comúns.

O problema da *árbore mínima de Steiner* en realidade non ten moito que ver co célebre xeómetra Jakob Steiner (1796-1863). Parece que o problema inicial, *encontrar un punto tal que a suma das súas distancias aos vértices dun triángulo sexa mínima*, foi proposto por Fermat e resolto, de forma independente, por Cavalieri e Torricelli a mediados do século XVII. Este punto, cando os ángulos do triángulo son menores de  $120^\circ$ , coñécese como *punto de Fermat do triángulo*. Se un ángulo é maior que  $120^\circ$ , o seu vértice é o que minimiza a suma de distancias. Steiner redescubriuno en 1837, ignorando a súa historia anterior, e xeneralizouno para  $n$  puntos: *encontrar o punto do plano que minimiza a suma de distancias a  $n$  puntos dados*. Pouco que ver co que agora se coñece como árbore de Steiner dun conxunto de puntos.

A formulación actual do problema realizárona V. Jarník e O. Kössler [9] sen relacionalo co problema de Fermat. Pasou bastante desapercibido ata que apareceu no coñecido libro *What is Mathematics?* [4]. Nel denominárono *problema de Steiner*, introducindo unha notable confusión sobre a autoría do mesmo. Porén, dada a gran difusión deste libro, o problema coñeceu de maneira moito máis ampla e suscitou un considerable interese.

Pero vexamos o problema orixinal.

## Problema de Fermat

Podemos formulalo así: «encontrar un punto  $P$  do plano tal que a suma das súas distancias a tres vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  sexa mínima». Hai moitas formas de resolvelo: creando unha poligonal cos tres segmentos, cuxa lonxitude será mínima cando estean aliñados; inscribindo o triángulo  $ABC$  en certo triángulo equilátero e utilizando o Teorema de Viviani; etc. Aquí utilizaremos un teorema clásico, lamentablemente moi esquecido, pois será moi útil na xeneralización do problema de Fermat. Trátase do *teorema de Ptolomeo* (figura 3).

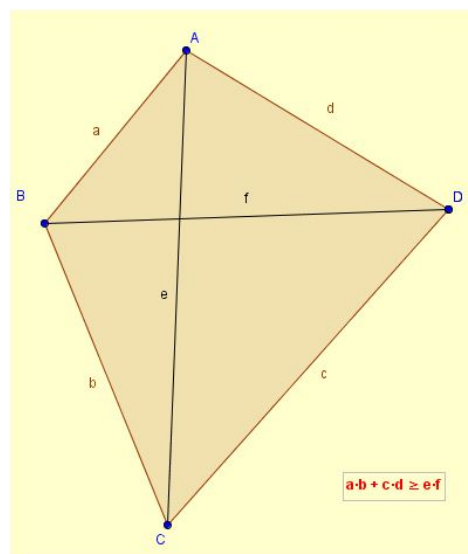


Figura 3: Teorema de Ptolomeo.

## Teorema de Ptolomeo

«En calquera cuadrilátero, a suma dos produtos dos lados opostos é maior ou igual que o produto das diagonais, dándose a igualdade se e só se o cuadrilátero é cíclico.»

Demostración: Construimos sobre o lado  $CD$  un triángulo  $CDE$  (figura 4, na esquerda), directamente semellante ao  $CAB$ , para o que abonda con construír os ángulos correspondentes en  $C$  e  $D$ . Tense entón que:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{e}{c} \Rightarrow a \cdot c = p \cdot e \quad (1)$$

Unindo agora o punto  $B$  co  $E$ , tense que os triángulos  $CEB$  e  $CDA$  son tamén directamente semellantes (figura 4, no centro), pois os ángulos  $\angle BCE$  y  $\angle ACD$  son iguais e os seus lados adxacentes son proporcionais por (1). Entón,

$$\frac{b}{e} = \frac{r}{d} \Rightarrow b \cdot d = r \cdot e \tag{2}$$

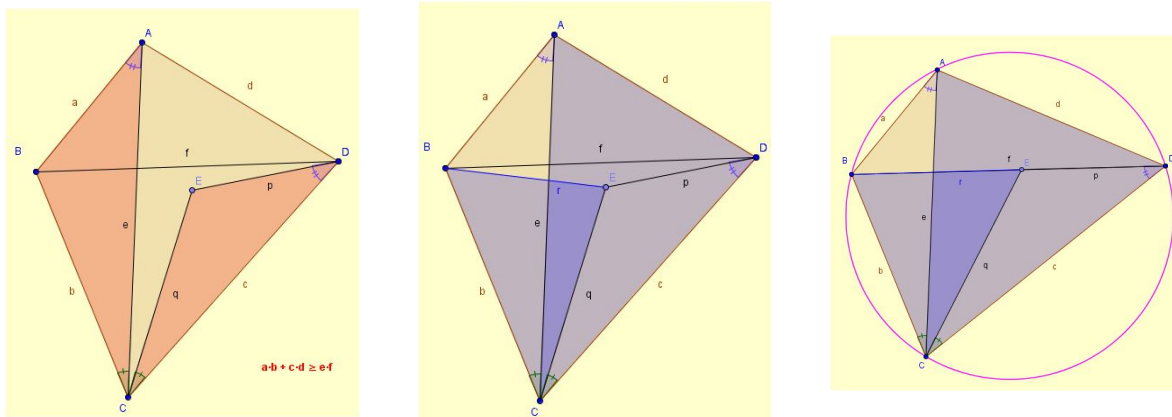


Figura 4: Pasos na demostración do teorema de Ptolomeo.

Sumando (1) e (2), temos que:

$$a \cdot c + b \cdot d = (p + r) \cdot e \geq f \cdot e \tag{3}$$

A igualdade só pode darse se o punto  $E$  se encontra aliñado con  $B$  e  $D$  e situado entre eles, de maneira que sexa  $p + r = f$ . Pero neste caso tense que  $\angle BAC = \angle BDC$  e o cuadrilátero resulta ser inscribible (figura 4, na dereita). Por outro lado, se o cuadrilátero é inscribible, os ángulos son iguais e o punto  $E$  está en  $BD$ , e será  $p + r = f$ , polo que  $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$ .

Pode seguirse a demostración co applet **T\_Ptolomeo**.

Volvamos ao problema de Fermat. Dado o triángulo  $ABC$ , debemos encontrar un punto  $P$  tal que a suma  $s = x + y + z$  das distancias aos vértices sexa mínima. Para iso construímos sobre un dos lados, por exemplo o  $a$ , un triángulo equilátero  $CBA'$  cara ao exterior do triángulo. Aplicando o teorema de Ptolomeo ao cuadrilátero  $PBA'C$  (figura 5), temos que:

$$y \cdot a + z \cdot a \geq w \cdot a \Rightarrow y + z \geq w$$

Entón,

$$S = x + y + z \geq x + w \geq AA' = d$$

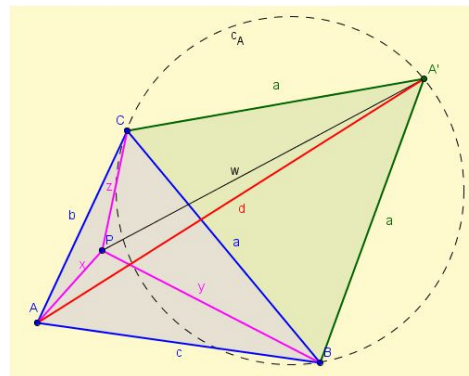


Figura 5: Problema de Fermat.

A suma de distancias de calquera punto  $P$  aos vértices é sempre entón maior ou igual que  $AA'$ . A igualdade só pode darse se  $P$  está na circunferencia  $c_A$  circunscrita ao triángulo equilátero  $CBA'$ , en cuxo caso  $y + z = w$ , e sobre o segmento  $AA'$  de maneira que  $x + w = AA'$ . Polo tanto, este punto, que chamaremos  $F$ , é único, se existe. Pero, sempre existe? Sempre que o ángulo  $A$  sexa menor ou igual que  $120^\circ$ , pois do contrario o punto  $A$  encóntrase no interior da circunferencia  $c_A$ . No caso de que o ángulo  $A$  fose maior ou igual que  $120^\circ$ , o punto que minimiza a suma de distancias aos tres vértices é xustamente o vértice  $A$ , e a suma de distancias é a suma dos dous lados  $b$  e  $c$ .

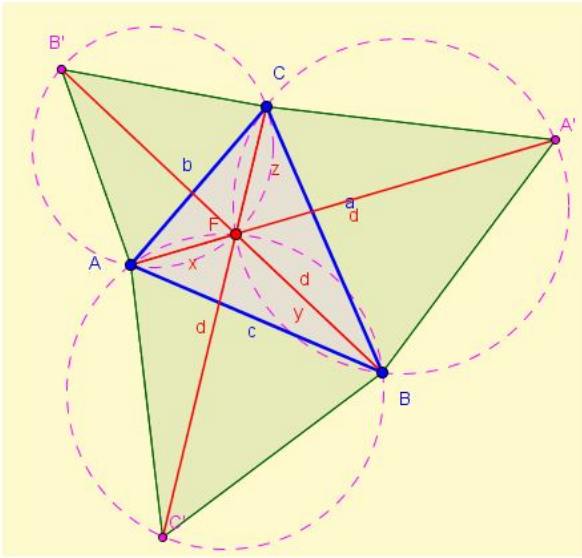


Figura 6: Punto de Fermat.

O ángulo  $BFC$  é de  $120^\circ$ , suplementario de  $60^\circ$ . Ademais, a recta  $AA'$  é a bisectriz do ángulo  $BFC$ , pois pasa polo punto medio  $A'$  do arco que abarca. Os tres segmentos  $x, y, z$  forman entón ángulos de  $120^\circ$ . Repetindo a construción sobre calquera dos outros lados, sempre con todos os ángulos do triángulo  $ABC$  menores que  $120^\circ$ , obtense o mesmo punto, posto que é único. Dedúcese entón que os tres segmentos  $AA', BB'$  e  $CC'$  se cortan nun mesmo punto  $F$ , o punto de Fermat do triángulo (figura 6), teñen a mesma lonxitude e forman entre si ángulos de  $120^\circ$ . Que a suma de distancias de  $F$  aos tres vértices é menor que a suma de dous lados calquera está claro, pois esta última é a suma de distancias do vértice no que concorren os dous lados aos tres vértices. Pero outra forma de velo é aplicar o teorema de Ptolomeo ao cuadrilátero  $ABA'C'$ :

$$b \cdot a + c \cdot a \geq d \cdot a \Rightarrow b + c \geq d$$

O valor desta suma mínima de distancias aos vértices calcúlase facilmente aplicando o teorema do coseno ao, por exemplo, triángulo  $ABA'$ :

$$d^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(B + 60^\circ) = c^2 + a^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(B) \cos(60^\circ) + 2a \cdot c \cdot \sin(B) \sin(60^\circ)$$

Pero

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a \cdot c}; \quad S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin(B); \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}; \quad \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Co que nos queda:

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S}$$

Sendo  $S$  a superficie do triángulo que, se se quere, pode poñerse en función dos lados mediante a fórmula de Heron. Como era de esperar, a fórmula é simétrica nas variables  $a, b$  e  $c$ . No caso do triángulo equilátero, o cálculo é máis sinxelo pois, sendo  $h$  a altura do triángulo e supoñendo o lado igual a 1, temos que:

$$d = 3 \cdot \frac{2}{3}h = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

E a razón de Steiner é neste caso a mínima, xa que a lonxitude da árbore de expansión mínima é 2:

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866025$$

## Árbore mínima de Steiner de $n$ puntos arbitrarios

Que ocorre co problema xeneralizado, cando temos  $n$  puntos? Poden substituírse dous puntos polo terceiro vértice dun dos triángulos equiláteros que determinan, o que ás veces se coñece como procedemento de Torricelli, e encontrar a árbore de Steiner dese conxunto de  $n - 1$  puntos, e continuar de forma recursiva ata ter só dous puntos. Obteríamos así unha árbore con  $n - 2$  puntos de Steiner engadidos aos  $n$  puntos iniciais.

Vexámolo no caso de catro puntos  $A, B, C$  e  $D$  (figura 7) que determinan un cuadrilátero convexo. Constrúese o punto  $E$  como o terceiro vértice dun triángulo equilátero de lado  $CB$ . Como sabemos que para un punto cualquiera  $H$  do arco de  $120^\circ$   $CB$ ,  $HE = HB + HC$ , hai que minimizar agora a lonxitude da árbore de Steiner que conecta  $A, D$  e  $E$ . Pero isto xa é un triángulo, que sabemos que ten unha árbore de Steiner única determinada polo punto de Fermat.

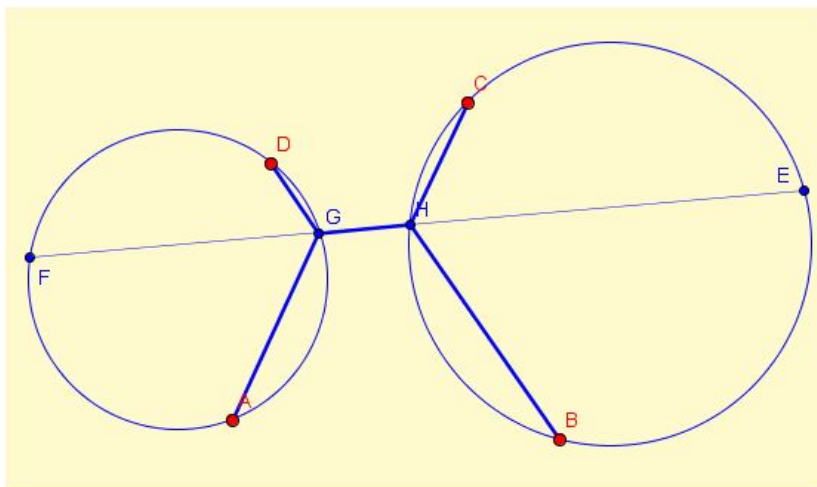


Figura 7: Árbore de Steiner dun conxunto de catro puntos, empezando por  $B$  e  $C$ .

Sobre un dos seus lados, o

$AD$  por exemplo, constrúese

un triángulo equilátero de terceiro vértice  $F$ . Sabemos que  $GF = GD + GH$  para calquera punto  $G$  do arco  $AD$ . Trazando o segmento  $FE$ , que cortará os arcos  $AD$  e  $CB$  se ningún ángulo do cuadrilátero é maior que  $120^\circ$ , determinamos os puntos de Steiner  $G$  e  $H$ . Uníndoos entre si e cos puntos iniciais, temos unha árbore de Steiner deste conxunto de puntos. A lonxitude total da árbore de Steiner atopada é a do segmento  $FE$ . Aplicamos dúas veces o procedemento de Torricelli para obter os dous puntos de Steiner que necesitamos. Referirémonos cando sexa necesario aos puntos auxiliares construídos no procedemento de Torricelli como puntos de Torricelli.

A macro `Torricelli.ggt` facilita esta construción. Dados dous puntos en orde, traza o terceiro que forma con eles un triángulo equilátero, percorrido en sentido positivo, así como a circunferencia circunscrita ao triángulo.

Pero a anterior é a única posibilidade? Non, a elección do par de puntos  $B, C$  pola que iniciamos a construción foi arbitraria. Se empezásemos polos puntos  $A$  e  $D$  o resultado tería sido o mesmo, pero vexamos que ocorre se empezamos cos puntos  $C$  e  $D$  (figura 8).

Procedendo como antes, substituímos os puntos  $D$  e  $C$  polo punto de Torricelli  $I$ , e os puntos  $B$  e  $A$  polo  $J$ . Determinamos os puntos de Steiner  $K$  e  $L$  unindo  $I$  con  $J$ , e intersecando o segmento  $IJ$  coas circunferencias circunscritas aos triángulos  $CDI$  e  $ABJ$ . En definitiva, obtemos outra árbore de Steiner distinta, e neste caso, cunha lonxitude aproximadamente dun 3,25% menor. As dúas construcións poden seguirse paso a paso co applet `Steiner_Cuadrilatero`.

Estas dúas árbores de Steiner constitúen mínimos locais para a lonxitude total de interconexión, no sentido de que modificando lixeiramente a posición dos puntos engadidos, a lonxitude total aumenta.

Cando teñen ambas a mesma lonxitude? Se se trata dos vértices dun cadrado, desde logo deben ser iguais. Pero, que condición menos restritiva podemos poñer para os catro puntos de maneira que a lonxitude das dúas árbores sexa a mesma? Facilmente, vese que se o cuadrilátero é simétrico respecto a unha das súas diagonais, o que ás veces se denomina un “papaventos”, as dúas árbores son simétricas unha da outra e teñen polo tanto a mesma lonxitude. Pero esta é unha condición suficiente que pode relaxarse un pouco máis para ter outra necesaria e suficiente: ambas as árbores teñen a mesma lonxitude se e só se as diagonais  $AC$  e  $BD$  do cuadrilátero son perpendiculares. A demostración, utilizando números complexos, é rutineira aínda que algo pesada. Cando as diagonais non son perpendiculares, a árbore mínima é a que ten os puntos de Steiner nos ángulos agudos determinados por elas.

As árbores de Steiner poden construírse materialmente somerxendo nun líquido xabonoso dúas placas paralelas unidas por pasadores dispostos a imaxe dos puntos cuxa árbore se quere determinar, como pode verse [neste vídeo](#). Debido á tensión superficial da película xabonosa, a superficie creada reducirase rapidamente a un mínimo, formándose láminas perpendiculares ás placas que unen os pasadores e conflúen entre si noutros puntos de tres en tres formando ángulos de  $120^\circ$ . Pero un mínimo local, se hai máis de un. Isto é debido a que dun mínimo local, a película xabonosa non pode evolucionar a outro, aínda que a súa superficie sexa menor, sen aumentar transitoriamente esta. Polo tanto, este procedemento empírico non nos garante a obtención da árbore mínima absoluta, senón só a dunha localmente mínima.

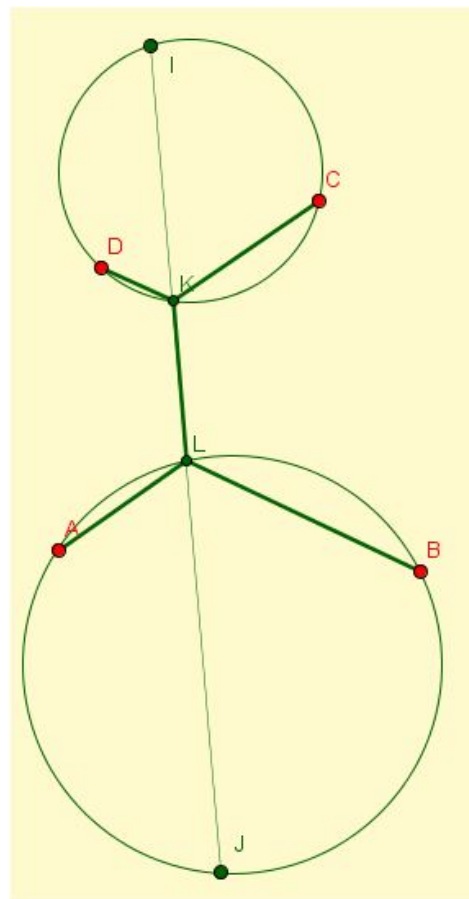


Figura 8: Árbore de Steiner dun conxunto de catro puntos, empezando por  $C$  e  $D$ .

## Complexidade algorítmica

Determinar a árbore de Steiner mínima é entón sinxelo: atópanse as dúas posibles e escóllese a de menor lonxitude. . . No caso de catro puntos que determinan un cuadrilátero convexo e sen ángulos maiores que  $120^\circ$  non hai outras opcións. Outras formas de substituír os puntos levan ás mesmas solucións ou a resultados dispartados.

Pero un algoritmo que a partir de catro puntos arbitrarios determine a súa árbore de Steiner mínima debe considerar todas as posibilidades, aínda que só sexa para descartalas. Cantas son? Pois seis posibilidades para escoller un par de puntos entre catro, por outras dúas para escoller entre os dous triángulos equiláteros que teñen por vértices a ese par de puntos. Total 12, nada demasiado grave para un ordenador.

Agora ben, se aumenta o número de puntos, a cousa complicase. Fagamos unha estimación simplificada. Para reducir o problema de  $n$  puntos a  $n - 1$  puntos debemos escoller un par de puntos entre  $n$  e un dos dous posibles triángulos equiláteros. Se chamamos  $T(n)$  ao número de configuracións teóricamente

posibles para  $n$  puntos, quedanos a relación recorrente:

$$T(n) = 2 \binom{n}{2} T(n-1) = n(n-1)T(n-1)$$

Desenvolvendo a recursividade ata  $T(2) = 1$ , temos

$$T(n) = n(n-1)T(n-1) = n(n-1)(n-1)(n-2)T(n-2) = \dots = \frac{n!^2}{2n}$$

Que para  $n = 2, \dots, 10$  dá

$$T(n) = 1, 6, 72, 1440, 43200, 1814400, 101606400, 7315660800, 658409472000$$

Máis de 0,65 billóns de posibilidades a ter en conta para tan só 10 puntos! Aínda que considerásemos que  $T(3) = 1$ , o que para un algoritmo que deba traballar con calquera conxunto de puntos pode ser discutible, iso só divide as posibilidades por 6, deixándonos aínda máis de cen mil millóns de posibilidades para 10 puntos. En realidade estes números poden rebaixarse considerablemente, pero non tanto como para que o seu crecemento deixe de ser exponencial.

Melzak propuxo un algoritmo [10] que consiste basicamente en descompoñer o conxunto de puntos noutros menores que poidan tratarse por separado, aplicando o proceso anterior a cada subconxunto e logo combinalos. Aínda que isto pode diminuír o número de situacións a tratar, non o fai de forma dramática. O tempo de execución, proporcional ao número de casos a tratar, crece co número  $n$  de puntos máis rapidamente que calquera polinomio, neste caso de forma exponencial. Dise que é un algoritmo non-polinómico. Un problema computacional considérase *fácil* se ten un algoritmo polinómico que o resolve. O problema considérase *difícil* se non hai algoritmos polinómicos que o resolvan.

Determinar que un problema é *fácil* é sinxelo: abonda con mostrar un algoritmo polinómico que o resolva. Porén, é difícil demostrar que é *difícil*: non chega con mostrar un algoritmo de tipo exponencial que o resolva, hai que demostrar que non existe ningún de tipo polinómico. Pero existe unha categoría de problemas, os NP-completos, para os que non se coñece ningún algoritmo polinómico, que son en certo sentido equivalentes. Un algoritmo que resolva un deles, permite resolver outro calquera. Crese que son realmente *difíciles*, pero está por demostrar. E o problema da determinación da árbore mínima de Steiner entra dentro desta categoría. Si que hai polo contrario algoritmos rápidos para encontrar solucións aproximadas [11].

## O caso do pentágono regular

A pesar do dito anteriormente, se se teñen poucos puntos e/ou algunhas simetrías, o problema é perfectamente abordable “a man”. Vexamos o caso dun pentágono regular, como o de vértices  $ABCDE$  da figura 9. Pódese visualizar a construción co applet **Steiner\_Pentagono**.

Podemos aplicar o procedemento de Torricelli a dous pares de vértices consecutivos. É dicir, substituímos os puntos  $B$  e  $A$  polo  $F$ , e os puntos  $E$  e  $D$  polo  $G$ . Temos xa un problema de tres puntos, o problema orixinal de Fermat, cos puntos  $G, F$  e  $C$ . Non hai máis que construír o triángulo equilátero de vértices  $F, G$  e  $H$ . O segmento  $CH$  ten entón a lonxitude da árbore buscada. Para construír a árbore, desfacemos o camiño. Trázase a circunferencia que pasa por  $G, F$  e  $H$ , e o punto  $K$  no que o segmento  $CH$  corta a esta circunferencia é o noso primeiro punto de Steiner. Sabemos xa que  $KH = KG + KF$ . Trazamos as circunferencias que pasan por  $G, D$  e  $E$  dun lado e  $A, B$  e  $F$  do outro. Os puntos  $J$  e  $I$



en que as cortan os segmentos  $KG$  e  $KF$  son os outros dous puntos de Steiner. Non temos máis que unir  $I$  con  $A$  e  $B$  dunha parte, e  $J$  con  $D$  e  $E$  da outra para completar a árbore de Steiner. Temos que:

$$\begin{aligned} CH &= CK + KH \\ &= CK + KF + KG \\ &= CK + KI + IF + KJ + JG \\ &= CK + KI + IA + IB + KJ + JD + JE \end{aligned}$$

Podemos calcular a lonxitude total da árbore sen atopar a de cada unha das súas ramas, determinada a lonxitude do segmento  $CH$ . Supoñamos que o lado do pentágono é 1 e calculemos por separado a lonxitude do segmento  $CL$  e a do  $LH$ , sendo  $L$  o punto medio de  $F$  e  $G$ .

No triángulo isóscele  $CBF$ , o ángulo obtuso mide  $108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$ , polo que os ángulos agudos iguais son de  $6^\circ$ . Entón,

$$CF = 2 \cos(6^\circ)$$

Como o ángulo  $EAF$  é de  $108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$ , o ángulo  $LFA$  é de  $12^\circ$ , e o ángulo  $CFL$  é  $60^\circ - 12^\circ - 6^\circ = 42^\circ$ . Entón,

$$CL = CF \cdot \operatorname{sen}(42^\circ) = 2 \cos(6^\circ) \operatorname{sen}(42^\circ)$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} FH = FG &= 2 \cdot CF \cdot \cos(42^\circ) = 4 \cos(6^\circ) \cos(42^\circ); & LH &= \frac{\sqrt{3}}{2} FH = 2\sqrt{3} \cos(6^\circ) \cos(42^\circ) \\ CH = CL + LH &= 2 \cos(6^\circ) \left( \operatorname{sen}(42^\circ) + \sqrt{3} \cos(42^\circ) \right) = 4 \cos(6^\circ) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen}(42^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(42^\circ) \right) \\ &= 4 \cos(6^\circ) \left( \cos(60^\circ) \operatorname{sen}(42^\circ) + \operatorname{sen}(60^\circ) \cos(42^\circ) \right) = 4 \cos(6^\circ) \operatorname{sen}(102^\circ) = 4 \cos(6^\circ) \cos(12^\circ) \end{aligned}$$

As razóns dos ángulos múltiplos de  $3^\circ$  pódense expresar mediante radicais cuadráticos a partir das de  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $36^\circ$  mediante os teoremas de adición. As de  $36^\circ$  obtéñense a partir do pentágono regular e as súas diagonais (“pentagrama místico”). Neste documento hai unha táboa con todas elas. En particular,

$$\cos(6^\circ) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{8}; \quad \cos(12^\circ) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + (\sqrt{5} - 1)}{8}$$

Estes valores dannos, tras algunha manipulación alxébrica, a seguinte expresión para a lonxitude da árbore de Steiner:

$$CH = \frac{\sqrt{22\sqrt{5} + 50} + \sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \cong 3,891156823$$

Como a árbore de expansión mínima está formada por catro dos cinco lados do pentágono, quedáanos unha razón de Steiner de 0,972789, que nos indica que se consegue apenas un 2,7% de ganancia respecto ao percorrido perimetral.

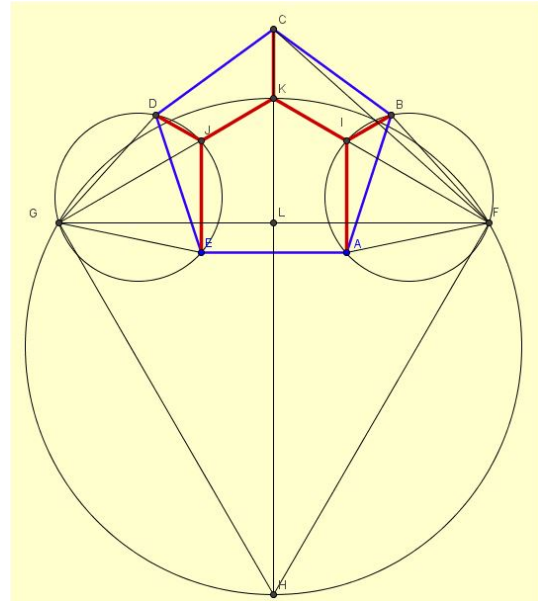


Figura 9: Árbore de Steiner dun pentágono regular.

É esta a árbore mínima? Neste caso é sinxelo comprobar que calquera outra forma razoable de substituír os puntos mediante o procedemento de Torricelli conduce á mesma árbore ou a outra xirada un múltiplo de  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , como era de esperar, dada a orde de simetría da figura.

Como curiosidade destacar que os segmentos  $IA$  e  $JE$  son perpendiculares ao lado  $EA$ , como se ve facilmente tendo en conta que os segmentos forman sempre nos puntos de Steiner ángulos de  $120^\circ$ .

Para polígonos regulares de  $n$  lados, con  $n \geq 6$ , a árbore mínima de Steiner coincide coa árbore de expansión mínima, formada por  $n - 1$  lados do polígono, xa que os lados consecutivos deste forman ángulos maiores de  $120^\circ$ . A razón de Steiner é trivialmente 1 neste caso.

## Árbore de Steiner dun cadrado

Un conxunto de árbores de Steiner be estudado é o correspondente a “escaleiras de man”, *ladders* en inglés. Trátase de  $2n$  puntos dispostos en liñas paralelas e igualmente espaciadas, formando  $n - 1$  cadrados. No que segue suporemos sempre que a distancia entre os puntos máis próximos, o paso e o ancho da escaleira, é 1. Para  $n = 2$  temos un cadrado (figura 10), un caso particular de cuadrilátero que xa temos visto. Hai dúas árbores de Steiner posibles, xiradas  $90^\circ$  unha respecto da outra, ambas da mesma lonxitude  $d$ . Poden verse co applet [Steiner\\_Cuadrilatero](#) modificando as posicións dos puntos. A lonxitude é moi fácil de determinar, será igual a un lado do cadrado de lado 1, máis dúas alturas dun triángulo equilátero de lado igualmente 1:

$$d = 1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Como a árbore de expansión mínima está formada por tres lados do cadrado, a razón de Steiner sería:

$$q = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \cong 0,9106836$$

A esta árbore chámasele ‘X’ na bibliografía polo seu aspecto.

## Árbore de Steiner dun dominó

No caso  $n = 3$ , dous cadrados ou un “dominó”, non é complicado dada a simetría da figura e o reducido número de puntos. A construción pode seguirse co applet [Steiner\\_Domino](#). Substituíndo sucesivamente  $D$  e  $C$  por  $C'$ ,  $A$  e  $F$  por  $F'$ ,  $C'$  e  $B$  por  $B'$  e  $F'$  e  $E$  por  $E'$  (figura 11), o segmento  $B'E'$  dános a lonxitude total da árbore de Steiner. Os puntos de Steiner determínanse coma sempre intersecando as circunferencias circunscritas aos triángulos equiláteros cos segmentos. Hai unha configuración simétrica desta, se se substitúen  $E$  e  $C'$  dun lado e  $B$  e  $F'$  do outro. Temos que a lonxitude é:

$$\begin{aligned} d &= E'B' = E'G + GH + HB' \\ &= GF' + GE + GH + HB + HC' \\ &= F'I + IG + GE + GH + HB + HJ + JC' \\ &= AI + FI + IG + GE + GH + HB + HJ + JC + JD \end{aligned}$$

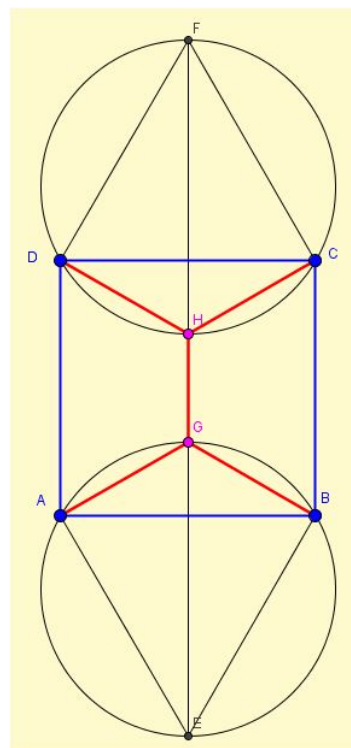


Figura 10: Árbore de Steiner dun cadrado.

No triángulo  $BCC'$  temos que o ángulo en  $C$  é de  $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$  e:

$$\begin{aligned} BB' &= BC' = 2 \cos(15^\circ) \\ &= 2 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Chamando  $O$  ao punto medio de  $E'B'$ , centro do dominó, e aplicando o teorema do coseno ao triángulo  $OBB'$ ,

$$\begin{aligned} E'B' &= 2OB' \\ &= 2\sqrt{OB^2 + BB'^2 - 2OB \cdot BB' \cdot \cos(135^\circ)} \\ &= \sqrt{1 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{11 + 6\sqrt{3}} \cong 4,6251816 \end{aligned}$$

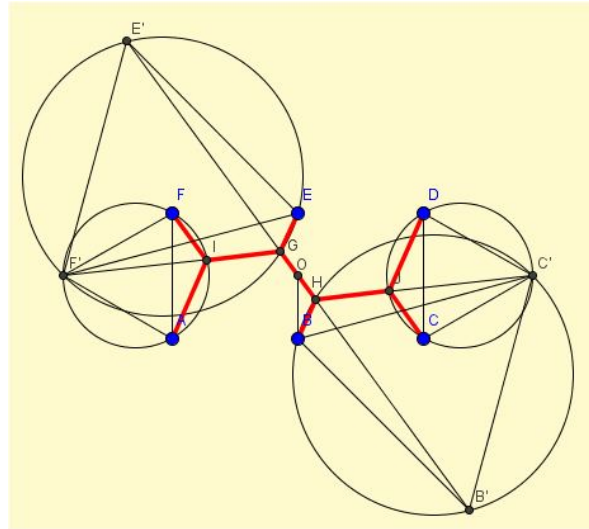


Figura 11: Árbore de Steiner dun dominó.

Como a lonxitude da árbore de expansión mínima é 5, a do perímetro menos un segmento de lonxitude 1, temos que a razón de Steiner é  $q = 0,925036$ .

Se utilizamos un **X** no cadrado  $ABEF$  e os dous segmentos  $BC$  e  $DE$  (figura 12, esquerda), a lonxitude é algo maior:

$$1 + \sqrt{3} + 1 + 1 = 3 + \sqrt{3} \cong 4,7320508$$

Algo mellor é un **X** para o cadrado  $ABEF$  e a árbore de Steiner do triángulo rectángulo e isóscele  $BCD$  (figura 12, dereita), pero a súa lonxitude segue sendo algo maior:

$$1 + \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cong 4,663902$$

A lonxitude da árbore de Steiner do triángulo  $BCD$ , unha árbore **Y**, é igual á do segmento  $BC'$  calculado antes. A denominación **Y** novamente é debida ao seu aspecto.



Figura 12: Árbores de Steiner no dominó, empregando **X** e **Y**.

### Árbore de Steiner dunha escaleira de $n$ chanzos

Consideremos agora unha escaleira de  $n$  chanzos, formada por  $2n$  puntos. Chamemos aos puntos  $A_1, A_2, A_3 \dots$  a un lado da escaleira e  $B_1, B_2, B_3 \dots$  ao outro. Imos considerar dous procedementos dos moitos posibles, digamos **a** e **b**, que nos levarán a árbores de Steiner distintas.

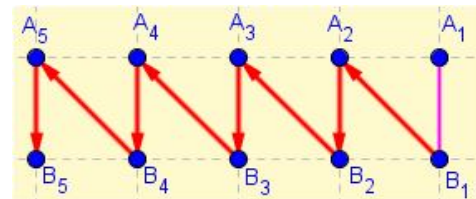


Figura 13: Orde na que se toman os puntos no procedemento **a**.

### Procedemento *a*

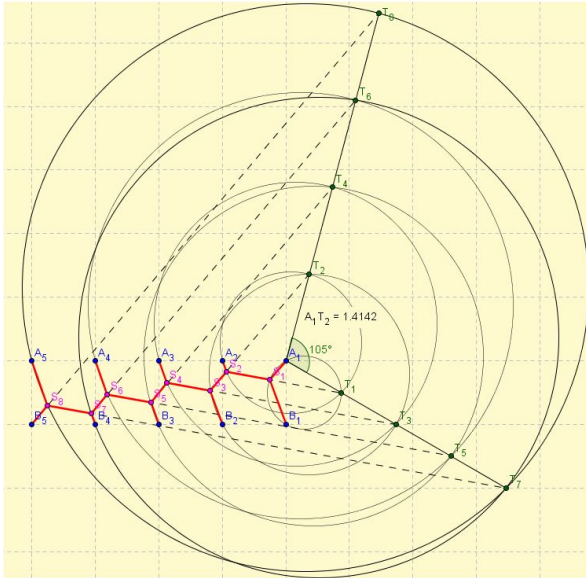


Figura 14: Árbore de Steiner dunha escaleira de cinco chanzos co procedemento *a*.

Aplicamos o procedemento de Torricelli aos puntos  $A_1$  e  $B_1$  para obter  $T_1$ , que podemos indicar como  $(A_1, B_1) \rightarrow T_1$ . Seguimos con  $(A_2, T_1) \rightarrow T_2$ ;  $(T_2, B_2) \rightarrow T_3$ ;  $(A_3, T_3) \rightarrow T_4$ ;  $(T_4, B_3) \rightarrow T_5$ ;  $(A_4, T_5) \rightarrow T_6 \dots$  tomando un punto alternativamente de cada lado da escaleira (figura 13) e o último punto de Torricelli atopado, como na figura 14 para  $n = 5$ .

Os puntos  $T_1, T_3, T_5 \dots$  quedan aliñados con  $A_1$  e separados por unha distancia de 1. Os puntos  $T_2, T_4, T_6 \dots$  tamén quedan aliñados con  $A_1$  e separados por unha distancia igual a  $\sqrt{2}$ . Ademais, as rectas que conteñen a estes puntos de Torricelli de índice par e impar forman un ángulo de  $105^\circ$ . Obtense unha árbore de Steiner completa, con  $n - 2$  puntos de Steiner de orde 3 e todos os terminais de orde 1.

No caso de  $n = 5$ , para construír a árbore trazamos o segmento  $A_5T_8$ , cuxa lonxitude será a de toda a árbore, e intersecámolo coa última circunferencia trazada, que pasa por  $T_7, A_5$  e  $T_8$ , para atopar o punto de Steiner  $S_8$ . Incorporamos

o segmento  $B_5S_8$  á árbore e unimos  $S_8$  con  $A_5$  e  $T_7$ . O segmento  $S_8A_5$  forma parte da árbore e a intersección do segmento  $S_8T_7$  coa circunferencia que pasa por  $T_6, B_4$  e  $T_7$  proporciónanos o punto  $S_7$ . Póde verse toda a construción no applet `Steiner_Escalera_5_no` e tamén en `Steiner_Escalera_4_no` para 4 chanzos.

A lonxitude  $la_n$  da árbore correspondente a  $n$  chanzos é a do segmento  $B_nT_{2n-2}$ , que é igual á do segmento  $T_{2n-2}T_{2n-1}$ , pois son lados dun mesmo triángulo equilátero. Pero esta última é moi fácil de calcular aplicando o teorema do coseno ao triángulo  $A_1T_{2n-2}T_{2n-1}$ :

$$|A_1T_{2n-2}| = (n-1)\sqrt{2}; \quad |A_1T_{2n-1}| = n$$

$$\begin{aligned} la_n &= |T_{2n-2}T_{2n-1}| = \sqrt{2(n-1)^2 + n^2 - 2\sqrt{2}(n-1)n \cdot \cos(105^\circ)} \\ &= \sqrt{3n^2 - 4n + 2 + 2\sqrt{2}(n^2 - n) \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{3n^2 - 4n + 2 + (n^2 - n)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \sqrt{2n^2 - 3n + 2 + (n^2 - n)\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Para  $n = 1, \dots, 7$  temos:

$$la_n = 1; \quad 1 + \sqrt{3}; \quad \sqrt{11 + 6\sqrt{3}}; \quad \sqrt{22 + 12\sqrt{3}}; \quad 5 + 2\sqrt{3}; \quad \sqrt{56 + 30\sqrt{3}}; \quad \sqrt{79 + 42\sqrt{3}}$$

Os tres primeiros resultados coinciden co xa coñecido. Para obter a razón  $qa_n$  de Steiner temos que dividir por  $2n - 1$ , pois a árbore de expansión mínima consiste en, por exemplo, os dous lados da escaleira e un chanzo. Loxicamente  $qa_1 = 1$ , pois unha escaleira cun só chanzo contén só dous puntos

e coinciden a árbore de Steiner coa de expansión mínima. A partir de  $n = 2$ ,  $q = a_n$  é crecente e o límite é  $q_\infty$ :

$$qa_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \cong 0,9106836025; \quad qa_\infty = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cong 0,9659258263$$

### Procedemento b

Para  $n = 1, 2, 3$  as árbores obtidas co **procedemento a** coinciden cos resultados que xa coñecemos, para os que é fácil determinar que teñen lonxitude mínima. Pero o esquema de aplicación do procedemento de Torricelli que aplicamos é arbitrario, aínda que simple. Pero ao ir en zig-zag dun lado da escaleira a outro, o seguinte punto a considerar non era sempre o máis próximo ao último considerado, a unha distancia de 1, senón outro situado en diagonal, a unha distancia de  $\sqrt{2}$ . En lugar disto, no **procedemento b** tomaremos sempre o punto máis próximo aínda non considerado (figura 15), co que percorreriámos os puntos dunha forma digamos sinusoidal, ou máis ben, de onda cadrada.

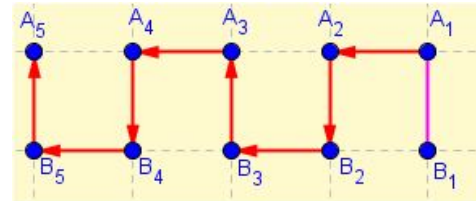


Figura 15: Orde na que se toman os puntos no procedemento b.

Os puntos de Torricelli de índice impar quedan agora aliñados ben coa paralela media da escaleira, os de índice  $4m + 1$ , ou ben co lado da escaleira que contén aos puntos  $B_i$ , os de índice  $4m + 3$ . A distancia entre estes puntos aliñados é  $T_i T_{i+4} = \sqrt{3}$ , cando  $i$  é impar.

Este segundo procedemento vai dar lugar a árbores moi distintas, segundo que  $n$  sexa par ou impar. Cousa que xa case se pode intuír a partir da orde en que se consideran os puntos. Aínda que, en ambos os casos, se obtén a solución óptima.

### Número de chanzas par

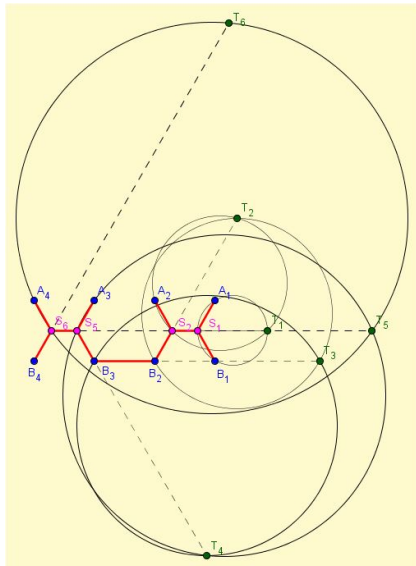


Figura 16: Árbore de Steiner dunha escaleira co procedemento b e  $n$  par.

Cando  $n$  é par (figura 16), a lonxitude  $lb_n$  total da árbore é a do segmento  $B_n T_{2n-2}$ , que é a mesma que a do segmento  $B_n T_{2n-1}$ . Pero esta pódese calcular moi facilmente, pois os puntos  $T_i$  quedan aliñados co lado inferior da escaleira cando  $i = 3 \pmod{4}$ . É:

$$lb_n = B_{2n} T_{2n-2} = B_{2n} T_{2n-1} = n - 1 + \frac{n}{2} \sqrt{3} \quad \text{con } n \text{ par}$$

Obtense unha árbore non completa, que pode descompoñerse en  $n - 1$  árbores completas de dous tipos:  $\frac{n}{2}$  árbores **X**, alternadas con  $\frac{n}{2} - 1$  segmentos unitarios, chamados habitualmente árbores **I**. Téñense  $n$  puntos de Steiner, no canto de  $2n - 2$ , e  $n - 2$  terminais de orde 2. A árbore **I**, un segmento unitario que conecta 2 terminais, é realmente unha árbore completa, posto que os terminais teñen orde 1, e contén  $2 - 2 = 0$  puntos de Steiner. A lonxitude  $lb_n$  destas árbores efectivamente é:

$$lb_n = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{3}) + \frac{n}{2} - 1 = n - 1 + \frac{n}{2} \sqrt{3} \quad \text{con } n \text{ par}$$

O punto de Steiner  $S_4$  coincide con  $B_3$  e o  $S_3$  con  $B_2$ . A construción no caso de 4 chanzas pode verse no applet

**Steiner\_Escalera\_4\_op.** Para  $n = 2$ , un cadrado, coincide co visto anteriormente. Pero para  $n > 2$  e par esta lonxitude é menor que a da árbore atopada polo **procedemento a**, como se comproba facilmente elevando ambas ao cadrado e restando:

$$\begin{aligned} la_n^2 &= 2n^2 - 3n + 2 + (n^2 - n)\sqrt{3} \\ lb_n^2 &= \frac{7}{4}n^2 - 2n + 1 + (n^2 - n)\sqrt{3} \\ la_n^2 - lb_n^2 &= \frac{1}{4}n^2 - n + 1 = \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

A razón de Steiner destas árbores e o seu límite son:

$$qb_n = \frac{n-1 + \frac{n}{2}\sqrt{3}}{2n-1}, \quad qb_\infty = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cong 0,9330127018$$

Para  $n = 4$ , a lonxitude é

$$lb_4 = 3 + 2\sqrt{3} \cong 6,464101615$$

cunha razón de Steiner  $qb_4 = 0,923443$ , mellor aínda que a do dominó.

Cantas configuracións equivalentes se teñen? As **X** poden presentarse en dúas orientacións e as **I** poden estar nun ou noutro lado da escaleira, polo que se teñen  $2n - 1$  posibilidades (figura 17).

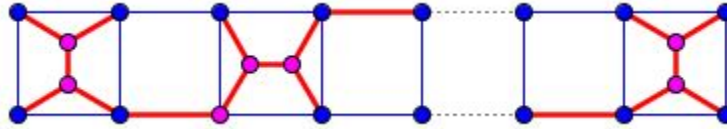


Figura 17: Hai  $2n - 1$  posibilidades.

### Número de chanzos impar

Para  $n$  impar, un número par de cadrados, a árbore non se pode descompoñer en subárbores completas máis pequenas, e contén  $n - 2$  puntos de Steiner. A construción pode verse en **Steiner\_Escalera\_5\_op.** A lonxitude da árbore será a do segmento  $A_n T_{2n-2}$ , que é a mesma que a lonxitude do segmento  $A_n T_{2n-1}$ . Se  $n$  é impar, o punto  $T_{2n-1}$  está aliñado coa paralela media da escaleira (figura 18). Chamando  $M$  ao punto medio do último chanzo, o  $A_n B_n$ , esta lonxitude pode calcularse no triángulo rectángulo  $A_n M T_{2n-1}$ . A lonxitude de  $A_n M$  é  $\frac{1}{2}$ , mentres que:

$$|MT_{2n-1}| = n - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{n-1}{2}\sqrt{3} = n - 1 + n\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quédanos entón

$$\begin{aligned} lb_n &= A_n T_{2n-2} = A_n T_{2n-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - 1 + n\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{7n^2 - 8n + 5}{4} + (n^2 - n)\sqrt{3}} \quad \text{con } n \text{ impar} \end{aligned}$$

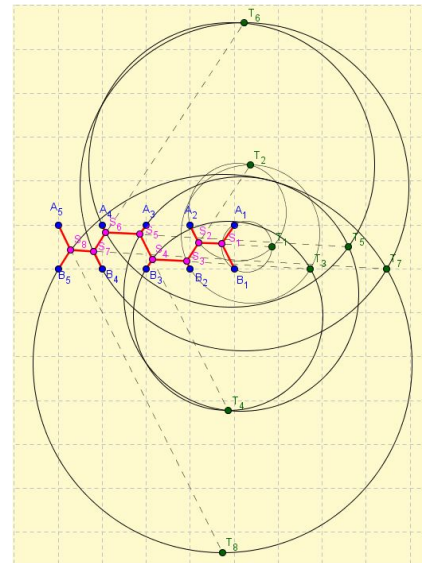


Figura 18: Árbore de Steiner co procedemento **b** e  $n$  impar.

Isto dáanos para  $n = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$  :

$$lb_n = 1; \quad \sqrt{11 + 6\sqrt{3}}; \quad \sqrt{35 + 20\sqrt{3}}; \quad \sqrt{73 + 42\sqrt{3}}; \quad \sqrt{125 + 72\sqrt{3}}$$

Para  $n = 1$  (segmento) e  $n = 3$  (dominó) coincide co resultado do **procedemento a**, pero non así para  $n > 3$ . Para comparar cos obtidos polo **procedemento a** restamos os cadrados das lonxitudes:

$$\begin{aligned} la_n^2 &= 2n^2 - 3n + 2 + (n^2 - n)\sqrt{3} \\ lb_n^2 &= \frac{7}{4}n^2 - 2n + \frac{5}{4} + (n^2 - n)\sqrt{3} \\ la_n^2 - lb_n^2 &= \frac{1}{4}n^2 - n + \frac{3}{4} = \frac{(n-1)(n-3)}{4} \end{aligned}$$

Que é 0 para  $n = 1$  e  $n = 3$  como vimos, e maior que 0 para  $n > 3$ , polo que tamén no caso de **n impar** é mellor o **procedemento b**.

A razón de Steiner destas árbores e o seu límite son:

$$qb_n = \frac{\sqrt{7n^2 - 8n + 5 + (4n^2 - 4n)\sqrt{3}}}{4n - 2}, \quad qb_\infty = \frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cong 0,9330127018$$

O límite é o mesmo que para  $n$  par.

Cantas configuracións equivalentes se teñen? Tan só dúas, simétricas respecto á paralela media das dúas filas de puntos.




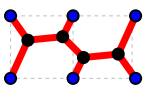
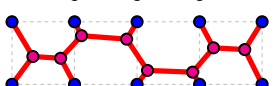
Vimos que o **procedemento b** para atopar a árbore mínima de Steiner dunha escaleira de  $n$  chanzos, xa sexa  $n$  par ou impar, é mellor que o **procedemento a**. Pero, é o mellor posible? Non podemos xustificalo aquí, pero así é. Dada a sinxeleza da disposición dos puntos, púidose demostrar, aínda que con non pouco esforzo, que estas son as árbores mínimas [3].

As árbores de Steiner de escaleiras de  $n + 1$  chanzos, con  $n$  par ou impar, adóitase coñecelas como **L<sub>n</sub>**, pola inicial de escaleira en inglés (*ladder*) e o número de cadrados unitarios, non de chanzos, de que constan. Á árbore **X** podería chamárselle **L<sub>1</sub>** e á **I**, **L<sub>0</sub>**. Especialmente importantes no que seguen son **L<sub>2</sub>** e **L<sub>4</sub>**.

## Árbores de Steiner nun reticulado regular

Que ocorre se no canto de escaleiras de  $2 \times n$  puntos, temos reticulados regulares de  $m \times n$  puntos, con  $2 < m \leq n$ ? O gran divulgador Martin Gardner, matemático por vocación que non por formación, dedicoulle a este asunto un dos artigos mensuais [7] que publicou durante moitos anos en *Scientific American*, cuxa edición en español é *Investigación y Ciencia*. Posteriormente realizou importantes contribucións [2].

Demostrouse [1] que a árbore mínima de Steiner dun reticulado cuadrangular regular de  $m \times n$  puntos sempre se pode descompoñer en subárbores de Steiner completas, conectadas entre si por terminais que pasan a ser de orde 2 ao conectarse, de tan só cinco tipos que xa temos visto (están reflectidos no quadro 1).

Nome	Árbore	Lonxitude exacta	Lonxitude aproximada	Razón $q$ de Steiner
I		1	1	1
Y		$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	1,9318	0,9659
X		$1 + \sqrt{3}$	2,7320	0,9106
$L_2$		$\sqrt{11 + 6\sqrt{3}}$	4,6251	0,9250
$L_4$		$\sqrt{35 + 20\sqrt{3}}$	8,3451	0,9272

Cuadro 1: As aproximacións están tomadas por defecto.

A situación é moi diferente ao que ocorre en escafeiras cun número impar de chanzos, formados por unha única árbore completa.

No cuadro 1 a árbore **X** é a que ten unha menor razón de Steiner. Por iso non resulta sorprendente que sexa a subárbole completa máis abundante neste tipo de árbores. Pero só no caso de retículos cadrados de  $2^n \times 2^n$  puntos (figura 19) se presenta en exclusiva, dunha maneira bastante obvia. Estes retículos teñen a mesma razón de Steiner que unha **X** illada. En todos os demais casos, aparecen unha ou máis subárbores completas dos outros tipos, o que aumenta a súa razón de Steiner.

Resumindo moito os resultados coñecidos [1], se  $m$  é distinta de 4 e maior que 2, hai como máximo tres subárbores completas distintas de **X**, dependendo de como sexan  $m$  e  $n$  (mód 6). Para  $m = 4$  (figura 20), hai da orde de  $\frac{n}{4}$  subárbores **I** acompañadas, se  $n$  non é múltiplo de 4, por unha ou dúas subárbores completas doutros tipos, dependendo do resto de  $n$  módulo 4, polo menos para valores de  $n$  suficientemente grandes.

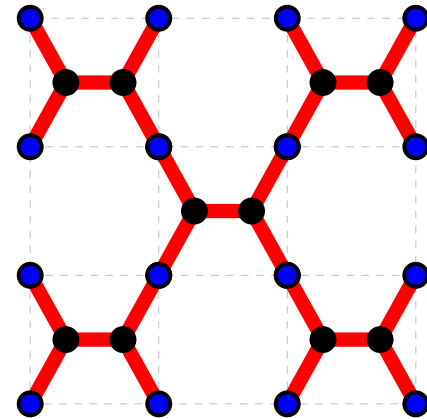


Figura 19: Retículo de  $2^2 \times 2^2$ .

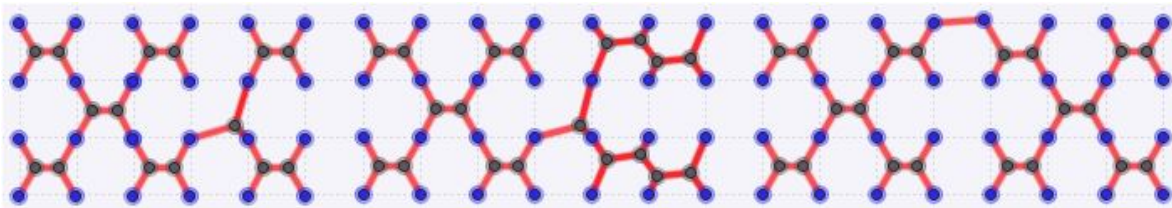


Figura 20: Árbores mínimas para retículos de  $4 \times 6$ ,  $4 \times 7$  e  $4 \times 8$  cunha **Y**, unha **Y** e dúas  $L_2$  e unha **I** respectivamente.



No ficheiro comprimido de arquivos GGT hai 5 macros que constrúen estas cinco subárbores a partir dun par de puntos, cuxa orde é relevante agás na `Steiner_I.ggt`, que non necesita maiores explicacións. Na `Steiner-Y.ggt`, que crea a árbore dun triángulo rectángulo isóscele, o segundo punto é o que corresponde ao ángulo recto e o terceiro determínase no sentido contrario ás agullas do reloxo, sentido positivo. A `Steiner_X.ggt` crea a árbore **X** co tramo central paralelo ao segmento determinado polos puntos dados, no cadrado que definen en sentido positivo. As outras dúas crean a árbore correspondente no rectángulo cuxo lado maior ten como extremos os puntos dados, sempre en sentido positivo.

## Retos

Para o suposto de que o lector queira exercitarse na arte da busca de árbores mínimas de Steiner propóñense algúns retos. En cada caso trátase de atopar a árbore mínima e a súa lonxitude exacta. A distancia mínima entre puntos en cada caso é 1.

- (a) Cadrado con triángulo equilátero adosado (figura 21, esquerda).
- (b) Cadrado con triángulo rectángulo isóscele (figura 21, dereita).



Figura 21: Retos (a) e (b).

- (c) Reticulado de  $3 \times 3$  puntos.
- (d) Reticulado de  $4 \times 5$  puntos.
- (e) Reticulado de  $4 \times 9$  puntos.
- (f) Reticulado de  $5 \times 6$  puntos.

## Referencias bibliográficas

- [1] Brazil, M., J.H. Rubinstein, D.A. Thomas, J.F.F. Weng e N.F. Wormald (1997): “Minimal Steiner Trees for Rectangular Arrays of Lattice Points”, *Journal of combinatorial theory, Series A*, 79, pp. 181-208.
- [2] Chung, F.R.K., M. Gardner e R.L. Graham (1989): “Steiner trees on a checkerboard”, *Math. Magazine*, 62, pp. 83-96.
- [3] Chung, F.R.K. e R.L. Graham (1978): “Steiner Trees for Ladders”, *Annals of Discrete Mathematics*, 2, pp. 173-200.
- [4] Courants, R. e H. Robbins (1941): *What is Mathematics?*, Nova York, Oxford University Press.
- [5] Du, D.Z. e F.K. Hwang (1990): “An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert-Pollack’s conjecture on Steiner ratio”, no *Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Actas do Simposio, St. Louis, IEEE, pp. 76–85.

- [6] Gilbert, E.N. e H.O. Pollack (1968): “Steiner Minimal Trees”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 16, pp. 1-29.
- [7] Gardner, M. (1986): “De como lanzar una red sobre un damero y otros rompecabezas del bosque de Steiner”, *Investigación y Ciencia*, 119, pp. 87-91.
- [8] Ivanov, A.O. e A.A. Tuzhilin (2012): “The Steiner Ratio Gilbert–Pollak Conjecture Is Still Open”, *Algorithmica*, 62, pp. 630-632.
- [9] Jarník, V. e O. Kössler (1934): “O minimálních grafech obsahujících n daných bodu”, *Cas. Pěstování Mat.*, 63, pp. 223-235.
- [10] Melzak, Z.A. (1961): “On the problem of Steiner”, *Canad. Math. Bull.*, 4, pp. 143-148.
- [11] Robins, G. e A.R. Zelikovsky (2000): “Improved Steiner Tree Approximation in Graphs”, no 11.º *Annual Symposium on Discrete Algorithms*, Actas do Simposio, San Francisco, ACM-SIAM, pp. 770–779.

## Notas

1. Ao longo do artigo menciónanse arquivos en formato GGB, GGT e HTML, que cómpre descargar para poder visualizar, accesibles a través de ligazóns que se atopan na nota previa do propio artigo.

**Ignacio Larrosa Cañestro**

*Grupo XeoDin*

<ilarrosa@mundo-r.com>