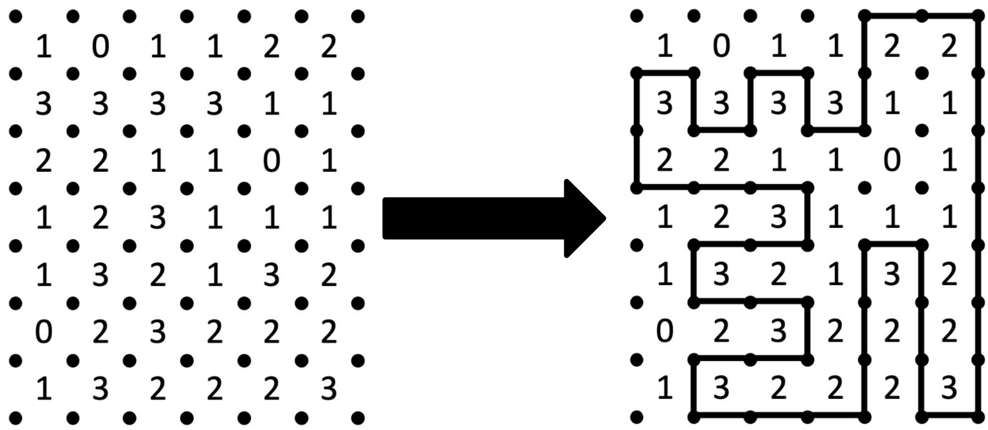
MATEMÁTICAS NA RAIA – 2022

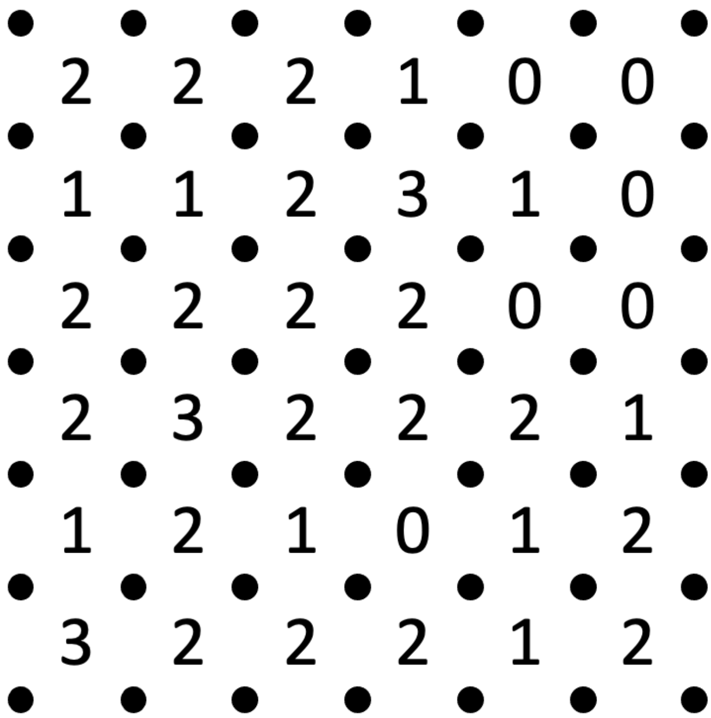
1.- CIRCUÍTO PECHADO

Conecta cada punto con outro contiguo cunha liña horizontal ou vertical (nunca diagonal) de xeito que ao final todas as liñas queden conectadas nun so circuíto pechado. Cada número indica a cantidade de liñas que debes debuxar en torno a ese número: o mínimo é 0 (non poñas ningunha liña arredor del) e o máximo é 3 (non poderían ser 4, porque 4 definiría un cadradiño independente do circuíto principal).

Exemplo:

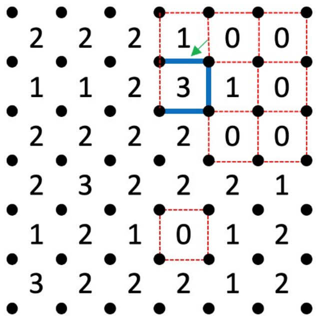


Debedes facer o mesmo co seguinte taboleiro:

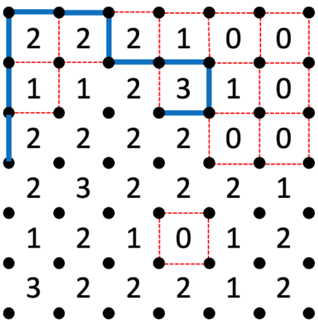


Proposta de solución

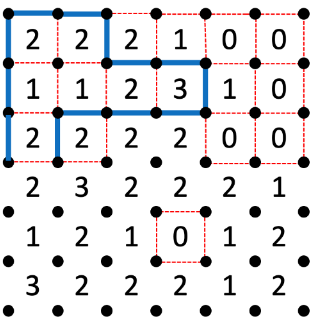
Excluímos sinalando en vermello os segmentos que non poden ser entorno ao 0, e polo tanto o último 1 da segunda fila só ten un segmento posible. E como so podemos prolongar en horizontal , xa temos as tres liñas do 3.



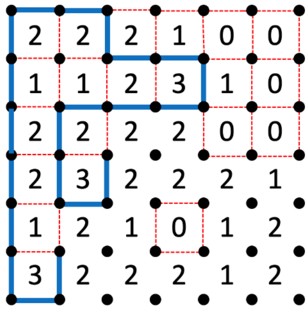
A liña superior do 3 só pode ir horizontal e subimos para cubrir o terceiro 2 da 1ª fila. Seguimos en horizontal dúas liñas pois ese 2 xa ten as dúas liñas. Baixamos tres liñas quedando cubertos o 2 e o 1,tendo a seguinte situación:



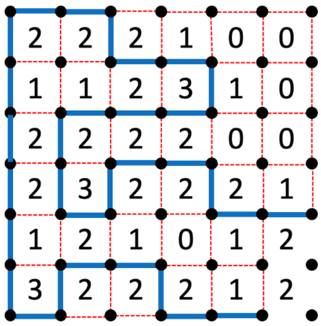
Volvendo á 2ª fila, a liña debaixo do 3 debe prolongarse en horizontal para completar as liñas do 2 e do 1 e aquí a única posibilidade e baixar, atopándonos co seguinte:



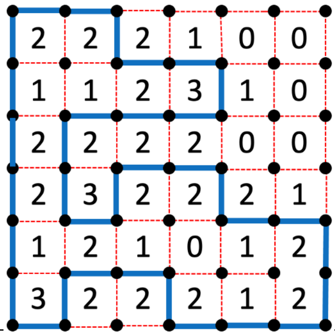
O segundo 2 da 1ª columna está cuberto, baixamos e como ao 3 da 2ª columna só lle quedan esas liñas está cuberto ese 2 e polo tanto debemos prolongar en vertical e así cubrir o 1, quedando as tres liñas do 3 da 1ª columna como na imaxe:

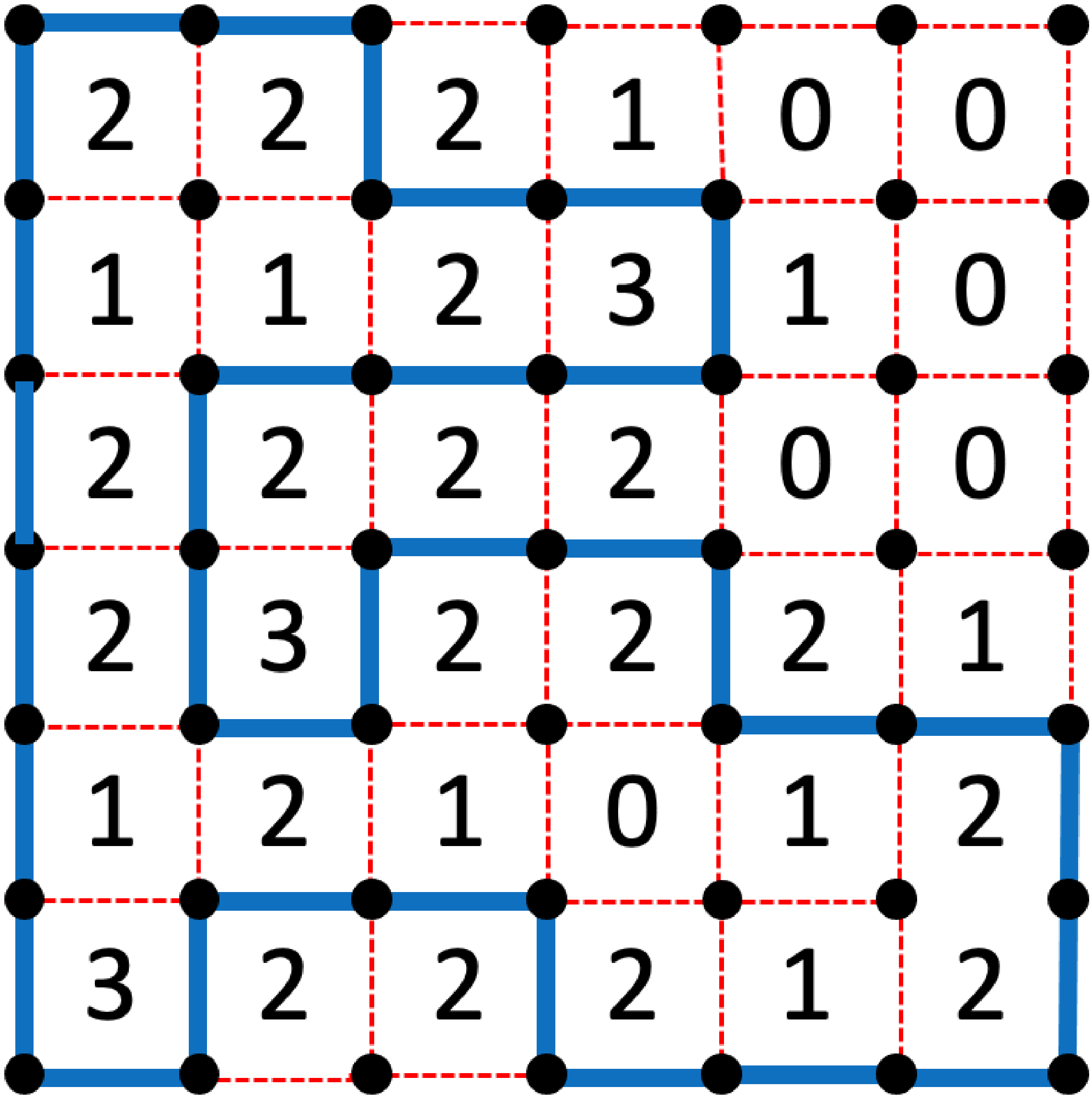


A liñas dos 3 da 1ª e da 2ª columna só poden prolongarse en horizontal dúas veces pois o 2 da 4ª cuarta e da última fila xa estarían completos, debemos baixar e seguir en horizontal tendo así cuberto o 1. Estariamos entón da seguinte maneira



Só nos falta rematar e está claro que na última fila so podemos ir en horizontal e logo subir en vertical pechando o circuíto





2.- CATRO BARCOS

Na marxe do rio Miño, que separa a Galicia e o Norte de Portugal, están catro barcos, chamados

"Oito", "Catro", "Dous" e "Un", porque ese é o número de minutos que cada un lle leva atravesar o referido río.

Un mariñeiro quere pasar os catro barcos para a outra marxe. Pode atar un barco a outro, pero non máis de un, e nese caso o tempo da travesía é igual ao do máis lento dos dous.

Cal é o mínimo tempo que necesita para pasar os catro barcos?

Proposta de solución

Queremos pasar catro barcos para a outra marxe e como as viaxes son con un ou dous barcos, isto indica que faremos tres idas con dous barcos e dúas voltas con un barco.

Como unha das viaxes durará 8h o mais apropiado é que o barco que lle leva 4 horas pase ao mesmo tempo, pero ningún deles debe vir de volta pois ocupariamos 12 h (8h+4h), polo que non deberán pasar en 1º lugar. Sempre debe volver o mais rápido, polo tanto sería:

- Ida: 1 e 2 (2 horas)
- Volta: Escollemos o barco mais rápido: 1 (1 hora)
- Ida: 4 e 8 (8 horas)

  Como fixemos na outra volta, agora escollemos o barco máis rápido para volver.
- Volta: 2 (2 horas)

  Finalmente, agora temos os barcos 1e 2 na marxe inicial:
- Ida: 1 e 2 (2 horas)

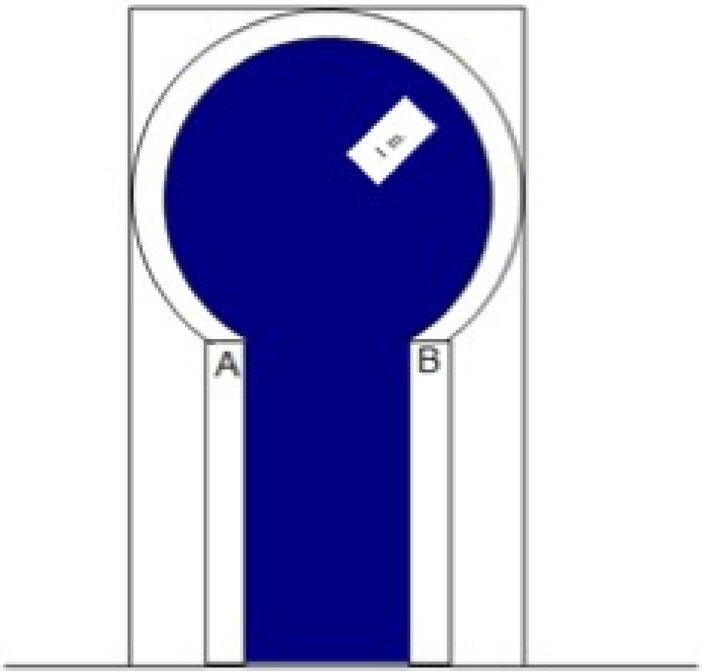
Neste momento, todos os barcos están ao outro lado, levando **15=2+1+8+2+2 horas**

3.- A FERRADURA

Na construción dunha mesquita, coma noutras construcións árabes, empregouse moito o arco de ferradura. A súa forma está baseada no círculo, aínda que non chega a ser completo, pero si supera o semicírculo.

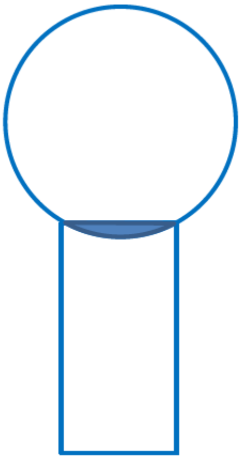
O arco de ferradura da figura está construído de forma que o segmento AB mide 1 metro, igual que o radio do círculo interior, e a altura das columnas que o sustentan é de 2 metros.

Cal é a área da zona sombreada correspondente ao oco do arco máis o oco entre as columnas?



Proposta de solución

A área que queremos calcular está formada por un círculo e un rectángulo ao que debemos restar a área comprendida entre os dous pois está sumada dúas veces. Ou sexa:



$$A = A_{\text{círculo}} + A_{\text{rectángulo}} - A_{\text{zona sombreada}}$$

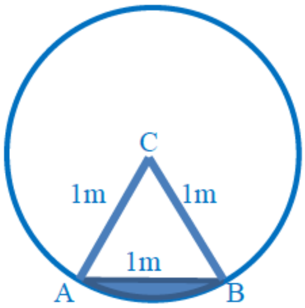
Comecemos por calcular as dúas áreas mais inmediatas:

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot\ 1^2 = \pi\ m^2$

$A_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 1 \cdot 2 = 2\ m^2$

Vamos agora a calcular a área sombreada na imaxe

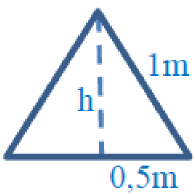
Se unimos dous radios que unen o centro do círculo cos puntos de inte rectángulo como mostra a imaxe.



A área sombreada resulta da diferenza entre a área do sector circular que inclúe o triángulo ABC. Como este triángulo é equilátero, entón o ángulo ACB mide 60°

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{60\,\pi}{360^o} = \frac{\pi}{6}\ \ m^2$$

Calculamos a área do triángulo:



Usando Pitágoras: $h = \sqrt{1 - 0.5^2} = \sqrt{0.75}$

Por tanto $A_{\text{triángulo}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{0.75}}{2} = \dfrac{\sqrt{0.75}}{2}$

$$A_{\text{zona sombreada}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{0.75}}{2}$$

Por tanto: $A = A_{\text{círculo}} + A_{\text{rectángulo}} - A_{\text{zona sombreada}} = \pi + 2 - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{0.75}}{2} = 2 + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{0.75}}{2}$

A≈ 5,051 m^2

4.- CAMIÑOS

O triángulo de números

1
1 2 1
1 2 3 2 1
1 2 3 4 3 2 1
1 2 3 4 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

Un camiño 1-2-3-4-5-6 é una liña quebrada formada por segmentos horizontais e verticais que pasan polos números 1, 2 ,3, 4 , 5, 6.

a) Cantos camiños 1-2-3-4-5-6 hai?

b) Se prolongamos este triángulo de números da forma en que está construído ata 20 filas, cantos camiños 1-2-3-4-...-20 hai?

c) Se procedemos desta maneira ata "n" filas , cantos camiños 1-2-3-4-...–n hai?

Proposta de solución

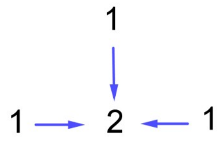
a) Este tipo de triángulos recordan ao de Pascal, polo que intentaremos buscar algunha relación coas potencias de 2

Empezando dende o caso mais sinxelo

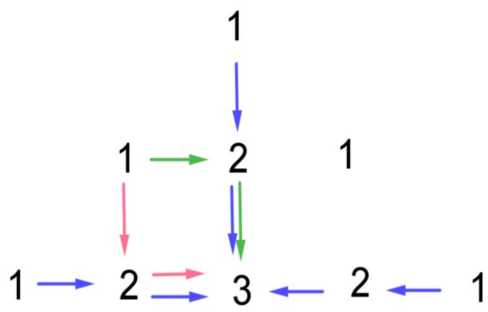
Se só temos unha fila , temos un único camiño $1 = 2^1-1$

Se temos 2 filas, temos 3 camiños marcados en azul, entón

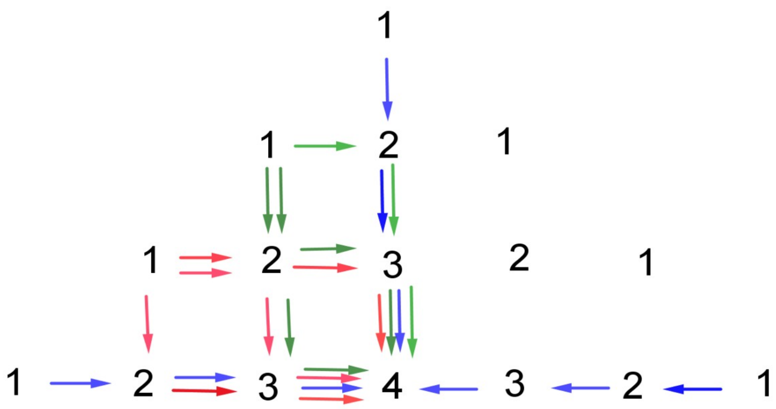
$3= 2^2-1$



Se temos 3 filas, temos 7 camiños, os tres marcados en azul (2 horizontais e 1 vertical) , 1 verde e 1 vermello na parte esquerda e os seus simétricos na dereita, entón $7= 2^3-1$



Se temos 4 filas, hai 15 camiños, os tres marcados en azul (2 horizontais e 1 vertical), 3 verdes que saen do 1 da segunda fila e e vermellos que saen do 1 da terceira fila, e os seus simétricos, así $15= 2^4-1$



Como se pode ver son potencias de 2 elevado ao número de filas (o número central) menos 1

Polo tanto 6 filas : $2^6-1= 63$

b) 20 filas $2^{20}-1= 1048576-1= 1048575$

c) Expresión xeral: $\mathbf{2^n-1}$ sendo n o número de filas

5.- TARXETAS LÓXICAS

Cantas frases falsas hai en cada tarxeta?

1

A. Nesta tarxeta, hai exactamente unha frase falsa.
B. Nesta tarxeta, hai exactamente dúas frases falsas.
C. Nesta tarxeta, hai exactamente tres frases falsas.
D. Nesta tarxeta, hai exactamente catros frases falsas.
E. Nesta tarxeta, hai exactamente cinco frases falsas.
F. Nesta tarxeta, hai exactamente seis frases falsas.

2

A. Nesta tarxeta, ningunha frase é falsa.
B. Nesta tarxeta, polo menos unha frase é falsa.
C. Nesta tarxeta, polo menos dúas frases son falsas.
D. Nesta tarxeta, polo menos tres frases son falsas.
E. Nesta tarxeta, polo menos catro frases son falsas.
F. Nesta tarxeta, todas as frases son falsas.

Proposta de solución

Na 1º tarxeta a frase F non pode ser verdadeira pois iso significaría que a tarxeta tería seis frases falsas, ou sexa, todas as frases serian falsas – incluíndo a frase F, o que seria unha contradición. Logo, a frase F é falsa! :

A – ? B – ? C – ? D – ? E – ? F – F

Se a frase A for verdadeira, entón a única frase falsa sería a frase F, sendo todas as outras verdadeiras. Isto significa que a frase B sería verdadeira e, por tanto, a tarxeta tería dúas frases falsas, o que non pode ser, xa que neste caso habería só unha frase falsa (a frase F).
Por tanto, a frase A te que ser falsa.

A – F B – ? C – ? D – ? E – ? F – F

Se a frase B fora verdadeira, entón as dúas frases falsas son A e F, pero que C, D e E son verdadeiras, o que é absurdo pois non podemos ter simultaneamente exactamente duas frases falsas e tres frases falsas. Logo, a frase B é falsa.

A – F B – F C – ? D – ? E – ? F – F

Polo mesmo razoamento, se a frase C fose verdadeira, entón as tres frases falsas xa serían as atopadas antes e entón que D e E son verdadeiras, entrando novamente nunha contradición.
Por tanto, a frase C tem de ser falsa.

A – F B – F C – F D – ? E – ? F – F

Se a frase D fose verdadeira, entón as catro frases falsas xa estarían, significando que E será verdadeira, entrando na mesma contradición dos razoamentos anteriores.
Logo, a frase D é falsa.

A – F B – F C – F D – F E – ? F – F

Falta a frase E. Como xa temos cinco frases falsas, significa que a frase E é verdadeira.

A – F B – F C – F D – F E – V F – F

Así, a tarxeta 1 ten cinco frases falsas!

Vexamos agora a tarxeta 2.

Para que a frase F fose verdadeira, todas as frases da tarxeta 2 terían que ser falsas, incluíndo a frase F, o que é absurdo. Logo, podemos concluír que F é falsa.

A – ? B – ? C – ? D – ? E – ? F – F

Como xa sabemos que a frase F é falsa, entón a frase A tamén o será, xa que é imposible dicir que non hai frases falsas na tarxeta. Entón a frase A é falsa

A – F B – ? C – ? D – ? E – ? F – F

Temos xa dúas frases falsas, o que significa que polo menos dúas frases da tarxeta 2 son falsas. Isto significa que as frases B e C serían verdadeiras.

A – F B – V C – V D – ? E – ? F – F

Estamos perante dúas frases falsas, e fáltanos saber o valor lóxico das frases D e E. Para que a frase E fose verdadeira, necesitamos ter polo menos catro frases falsas, o que é imposible, pois só temos dúas frases falsas (A e F) e a frase D é a única que faltaría descubrir o valor lóxico. Por tanto, a frase E terá de ser falsa.

A – F B – V C – V D – ? E – F F – F

Neste momento, xa temos tres frases falsas, o que significa que polo menos temos tres frases falsas na tarxeta 2, polo que a frase D é verdadeira.

A – F B – V C – V D – V E – F F – F

Logo, na tarxeta 2 hai tres frases falsas!