MATEMÁTICAS NA RAIA – 2024

1.- MURALLA DE VALENÇA

Cunha superficie aproximada de 35000 m², preto de 5000 metros de perímetro amurallado, 13 baluartes, 33 garitas*, 5 “*revellines*” e case 200 “*cañoneras*”, a fortaleza de Valença foi testemuña de excepción das tensas (e tamén prósperas) relacións que mantivo Galicia co norte de Portugal durante os últimos 800 anos.*

O día 1 de xaneiro de 2023 derrubouse parte da muralla da fortaleza de Valença.

Axudade á xente de Valença. Hai que (re)construír a muralla coas pedras caídas. As pedras están delimitadas por liñas grosas. **En cada pedra hai que colocar dúas cifras do 1 ao 8**, tendo en conta que estas non se repiten nin na liña horizontal, nin na columna vertical e que en cada pedra ten que haber un díxito par e outro impar. Fixádevos que en cada liña temos 4 pedras (partidas ou enteiras).

5			3	7			8
		2			6		
	6					3	
6							7
3							6
	8					4	
		1			4		
1			4	3			2

APM Associação de Professores de Matemática

MATEMÁTICAS NA RAIA – 2024

AGAPEMA

Proposta de resolución

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B			2			6		
C		6					3	
D	6							7
E	3							6
F		8					4	
G			1			4		
H	1		8	4	3		6	2

Denotamos con as filas e con números as columnas

Na fila A só falta o impar 1 que só pode ir en A7. Nesta fila faltan tres pares e en A6 só pode ir o 2 pois na columna 6 xa están os outros pares. O 4 debe ir en A2, pois xa temos o 6 nesa columna e entón o 6 vai en A3. Temos así completa a 1ª fila.

Vamos á última fila, onde faltan por colocar 5, 6, 7 e 8. En H2 so podemos colocar 5 ou 7, pois na columna 2 xa están os outros pares, por tanto en H3 debe ir un par e como o 6 e o 2 xa están colocados irá o 8, así o 6 terá que ir na columna 6 ou 7, pero na columna non é posible, pois xa está, entón vai en H7.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4		2			6		
C	7	6	5				3	4
D	6							7
E	3							6
F	2	8					4	
G	8		1			4		
H	1		8	4	3		6	2

Cubrimos agora columna 1 pois xa ten varios valores, aquí faltan os números 2, 4, 7 e 8. O lugar C1 debe ser un valor impar pois a pedra que xa ten un número par e a única posibilidade é o 7. Tamén sabemos que F1 ten que ser o 2, pois nesa liña xa están o 4 e 8. Quedan por colocar o 4 e o 8 e as únicas posibilidades son o 8 para G1 pois nesa liña xa está o 4 e por tanto en B1 irá o 4.

Na última columna, só nos falta o número par 4, que terá que ir forzosamente en *C8*, pois nas restantes filas xá está ese valor.

Agora, na columna *3*, faltan os números 3, 4, 5 e 7. Como, destes números, na fila *C* só falta o 5, entón *C3* é 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4		2			6		
C	7	6	5				3	4
D	6							7
E	3	2						6
F	2	8			6		4	
G	8	7	1	6	5	4	2	3
H	1	5	8	4	3	7	6	2

Na fila G faltan os números 2, 3, 5, 6 e 7 e en G5 só pode ir o 5, xa que ten que ser impar e non pode ser 3 nin 7 pois xa están na columna 5. Da mesma maneira en G8 só pode estar o 3, pois esta columna xa ten os valores 2, 6 e 7. E por tanto o 7 queda para en G2. Así mesmo en G7 só poderá estar o 2, xa que o 6 xa está nesa columna. C que o 6 queda para G4.

Volvendo á fila H na que nos quedaba por colocar o 5 e o 7, agora xa sabemos que o 7 vai en H6 e o 5 en H2 por ser as únicas posibilidades.

Na fila F falta cubrir 1, 3, 5, 6 e 7. O número par debe ir en F4 ou F5, e como xa está na columna 4, entón vai en F5. Podemos cubrir é E2, co número 2, pois é o único par que falta nesa columna e está nunha pedra que xa ten un impar.

MATEMÁTICAS NA RAIA – 2024

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4		2			6	7	
C	7	6	5				3	4
D	6		4				8	7
E	3	2	7				5	6
F	2	8	3	7	6		4	
G	8	7	1	6	5	4	2	3
H	1	5	8	4	3	7	6	2

Na columna 7 faltan 5, 7 e 8. Como B7 e E7 pertencen a pedras que xa teñen un par, serán ocupadas por 5 e 7. Sobra entón o 8 para a posición D7. Na fila D, faltan 1, 2, 3, 4 e 5 e na posición D2 só podemos colocar 1 ou 3, entón D3 terá que ser par e a única posibilidade é o 4. Podemos entón rematar a columna 3, xa que só quedan por colocar o 3 e o 7, como a fila E xa ten o 3, entón E3 será 7 e F3 será o 3.
Agora, na fila *F*, falta colocar os números 1, 5 e 7. Como as columnas *6* e *8* xa teñen o número 7, entón o 7 irá en F4.
Como se pode ver, a columna *7* ainda non ten o número 7 que só pode . Como a fila *E xa ten ese valor entón na posición B7* vai o número 7 e como consecuencia para completar a columna temos que *E7* é 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4		2			6	7	5
C	7	6	5			8	3	4
D	6		4			3	8	7
E	3	2	7	8	4	1	5	6
F	2	8	3	7	6	5	4	1
G	8	7	1	6	5	4	2	3
H	1	5	8	4	3	7	6	2

Na fila *E* faltan os números 1, 4 e 8, na posición *E5* podemos ter calquera destes valores, e en *E4* só podemos poñer o 8 pois o 4 xa está nesa columna. Como *E5* e *E6* son parte da mesma pedra, un terá que ser par e outro impar. Como o 4 xa está na columna 6, entón isto obriga a que *E6* sexa 1 e o 4 para *E5*.

Na columna *6* faltan por colocar o 3, 5 e 8 como liña *C* xa ten dous deses valores entón *C6* será 8. Así *F6* será 5, pois na fila F xa está o 3 e por tanto *D6* será 3.

Agora estamos en condicións de dicir que *F8* será 1 (pois é o único que falta nesa fila), o que implica que *B8* será 5 (pois pasa a ser o que falta nesa columna).

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4	3	2	1	8	6	7	5
C	7	6	5			8	3	4
D	6	1	4			3	8	7
E	3	2	7	8	4	1	5	6
F	2	8	3	7	6	5	4	1
G	8	7	1	6	5	4	2	3
H	1	5	8	4	3	7	6	2

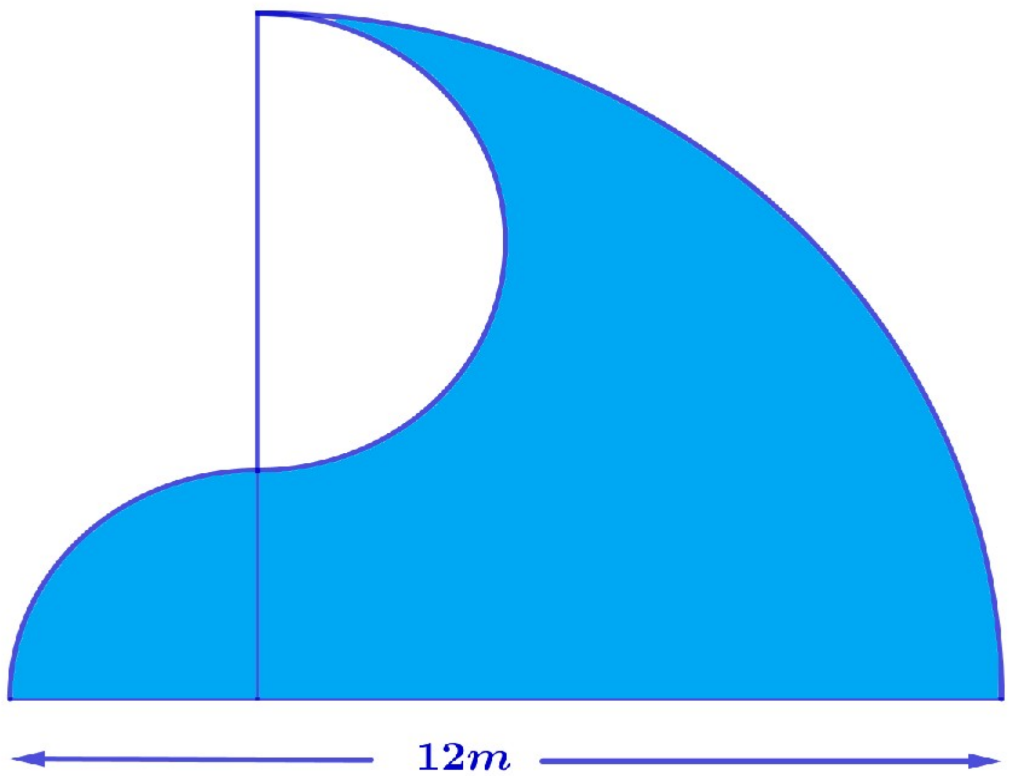
Na columna *2* faltan 1 e 3. Como a fila *D* xa ten o número 3, entón *D2* será 1, polo que *B2* será 3. Na fila *B* faltan 1 e 8. E por eliminación *B4* é 1, logo *B5* é 8.
Por fin, na fila *C* faltan 1 e 2. O 1 non pode ir na columna *4,* entón *C5* será 1 e *C4* o 2. Na fila *D* faltan os números 2 e 5, e en *D4* terá que ser 5 e *D5* será 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	4	6	3	7	2	1	8
B	4	3	2	1	8	6	7	5
C	7	6	5	2	1	8	3	4
D	6	1	4	5	2	3	8	7
E	3	2	7	8	4	1	5	6
F	2	8	3	7	6	5	4	1
G	8	7	1	6	5	4	2	3
H	1	5	8	4	3	7	6	2

2.- SURFEANDO

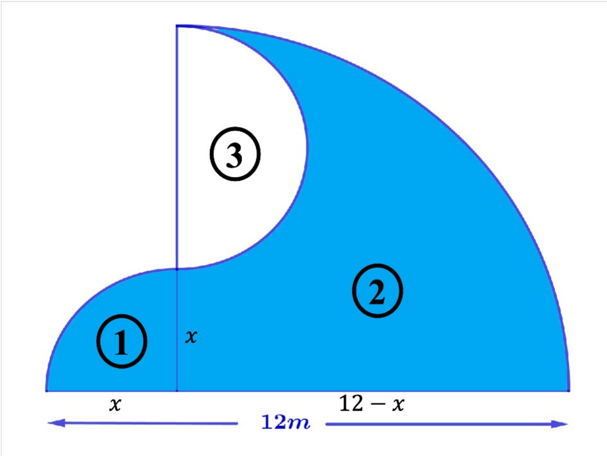
As costas de Portugal e Galicia están bañadas polo océano Atlántico no que, como sabemos, fórmanse unhas olas que os surfistas aproveitan para realizar as súas actividades, sobre todo en Nazaret e Pantín, dous dos lugares máis visitados polos surfistas de todo o mundo.

Hai non moito tempo tivemos un temporal con grandes olas como a que ves na imaxe con 12 metros de ancho, queremos saber **cal é a área que ocupa a ola** do seguinte gráfico:



Proposta de resolución

Comezamos por saber cal é a composición da figura, dividindo en diferentes áreas de formas coñecidas.



A área pedida será resultado da suma da área 1 e a 2.

A área 1 é a dun cuarto de círculo de radio x metros, entón:

$$A_1 = \frac{1}{4} A_{\text{círculo de radio } x} = \frac{1}{4} \times \pi x^2 = \frac{\pi x^2}{4} m^2$$

A área 2 é a diferenza entre a área dun cuarto de círculo de radio $12 - x$ metros e a área 3 que é a área de medio círculo de diámetro $12 - x - x = 12 - 2x$ metros, ou sexa, de radio $\frac{12-2x}{2} = 6 - x$ metros:

$$A_3 = \frac{1}{2} A_{\text{círculo de radio } 12-2x} = \frac{1}{2} \times \pi (6-x)^2 = \frac{\pi (6-x)^2}{2} m^2$$

$$A_2 = \frac{1}{4} A_{\text{círculo de radio } 12-x} - A_3 = \frac{1}{4} \times \pi (12-x)^2 - \frac{\pi (6-x)^2}{2} = \frac{\pi (12-x)^2 - 2\pi (6-x)^2}{4} m^2$$

Desenrolando os cadrados temos:

$$A_2 = \frac{\pi \left(144 - 24x + x^2\right) - 2\pi \left(36 - 12x + x^2\right)}{4} = \frac{144\pi - 24\pi x + \pi x^2 - 72\pi + 24\pi x - 2\pi x^2}{4} = \frac{72\pi - \pi x^2}{4} m^2$$

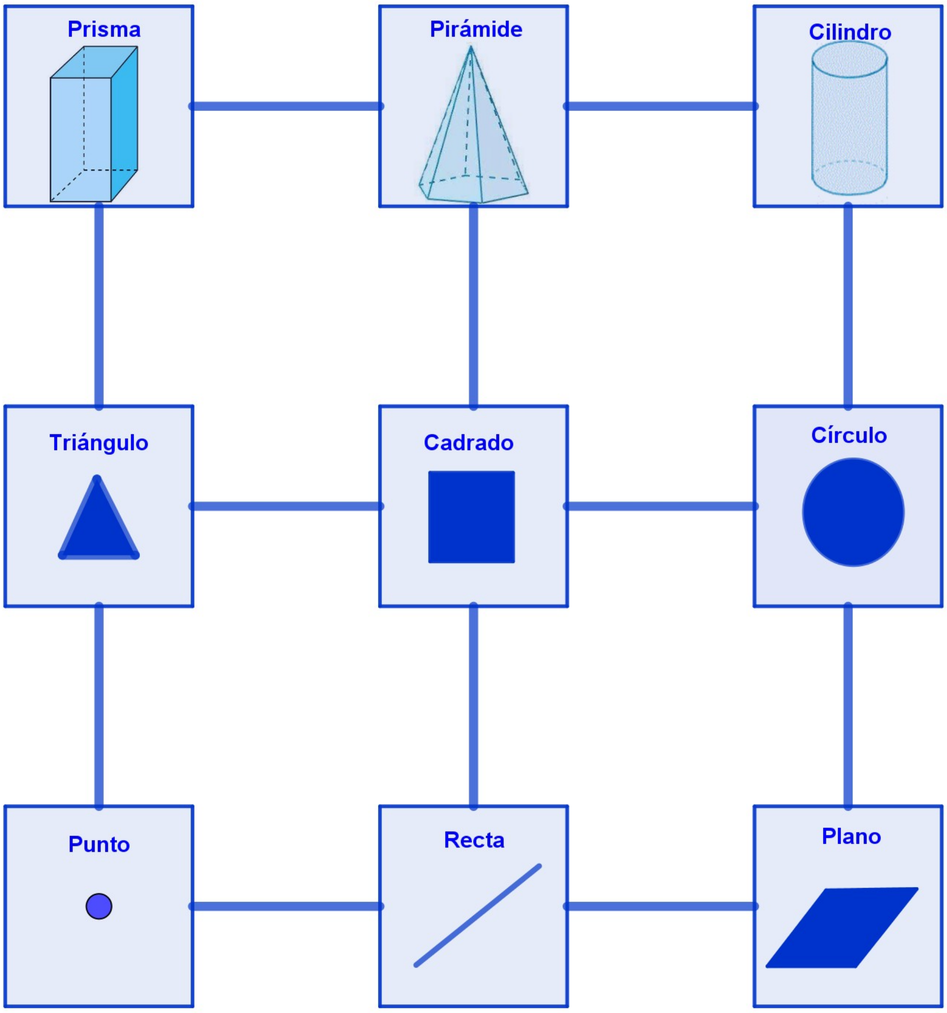
Por tanto a área pedida que é a suma de 1 e 2:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{72\pi - \pi x^2}{4} = \frac{72\pi}{4} = 18\pi m^2$$

Por tanto, a área ocupada pola ola da imaxe será: $18\pi m^2$.

3.- CAMIÑOS

Blas Pascalín, un gran amante das matemáticas, atopa este diagrama con 9 elementos especiais das matemáticas: **punto, recta, plano, triángulo, cadrado, círculo, prisma, pirámide e cilindro**. Empeza no **punto** e pode moverse horizontal ou vertical, un paso cada vez. Párase cando non pode seguir camiñando sen pasar polo mesmo lugar máis dunha vez.



a) Atopar o número de percorridos diferentes posibles.

b) Se o tempo que tarda en pasar dun elemento a outro é dun segundo, cal é o tempo medio dun percorrido?

c) Cal é a probabilidade de que o seu último destino sexa o cilindro?

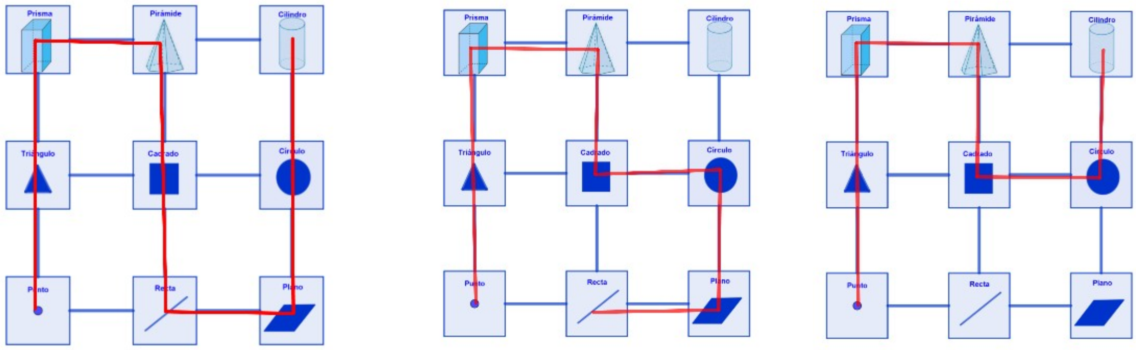
Proposta de resolución

Podemos resolvelo con un diagrama de árbore, pero farémola mais visual con unhas imaxes.

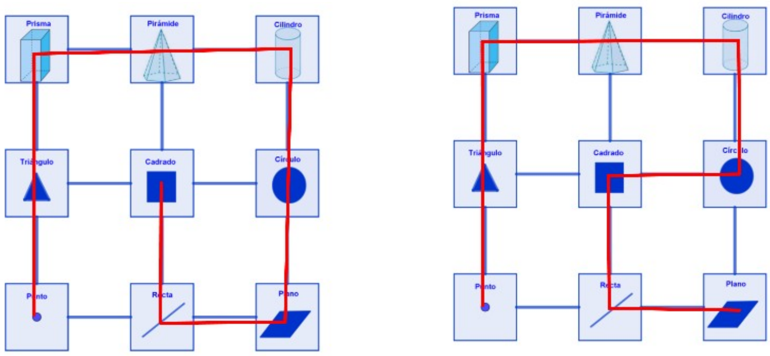
Desde punto podemos ir á triángulo ou á recta, analizaremos os camiños que temos subindo 1º á triángulo e logo por simetría teremos o mesmo número indo 1º á recta

Desde triángulo podemos ir á prisma e ou a cadrado, empezamos por prisma e desde aquí imos a pirámide, podendo desdobrar de novo á cadrado ou a cilindro, tendo as seguintes posibilidades:

Á cadrado, 1 camiño de lonxitude 8, 1 de lonxitude 7 e 1 de lonxitude 6:

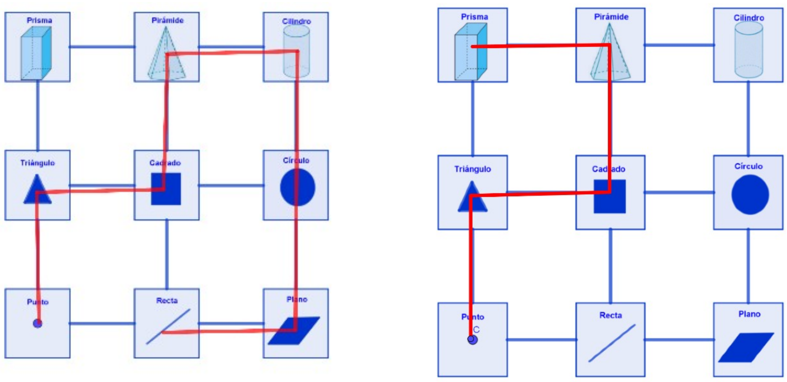


Á cilindro, 2 camiños de lonxitude 8

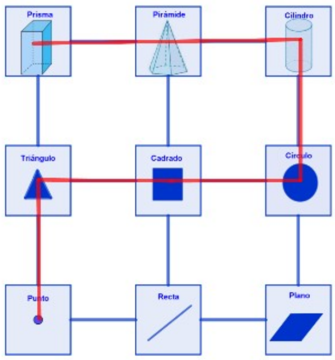


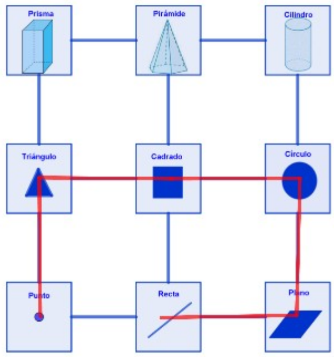
Consideremos agora as posibilidades se desde triángulo imos a cadrado e desde aquí podemos ir a tres sitios diferentes ao ser un valor central: pirámide, recta ou círculo.

Á pirámide, 1 camiño de lonxitude 7, 1 de lonxitude 4:

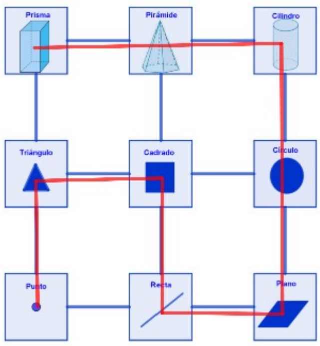


Se imos á círculo,1 de lonxitude 6 e 1 de lonxitude 5::





Á recta, 1 camiño de lonxitude 8,



Aquí están representados 10, que son a metade dos camiños, os que van de punto a triángulo como 1º paso, haberá outros tanto por simetría se o 1º paso é de punto a recta.

a) Entón en total temos 20 camiños

b) Nesta metade temos 4 camiños de lonxitude 8, 2 camiños de lonxitude 7, 2 camiños de lonxitude 6, 1 camiño de lonxitude 5 e 1 camiño de lonxitude 4. Por tanto no total

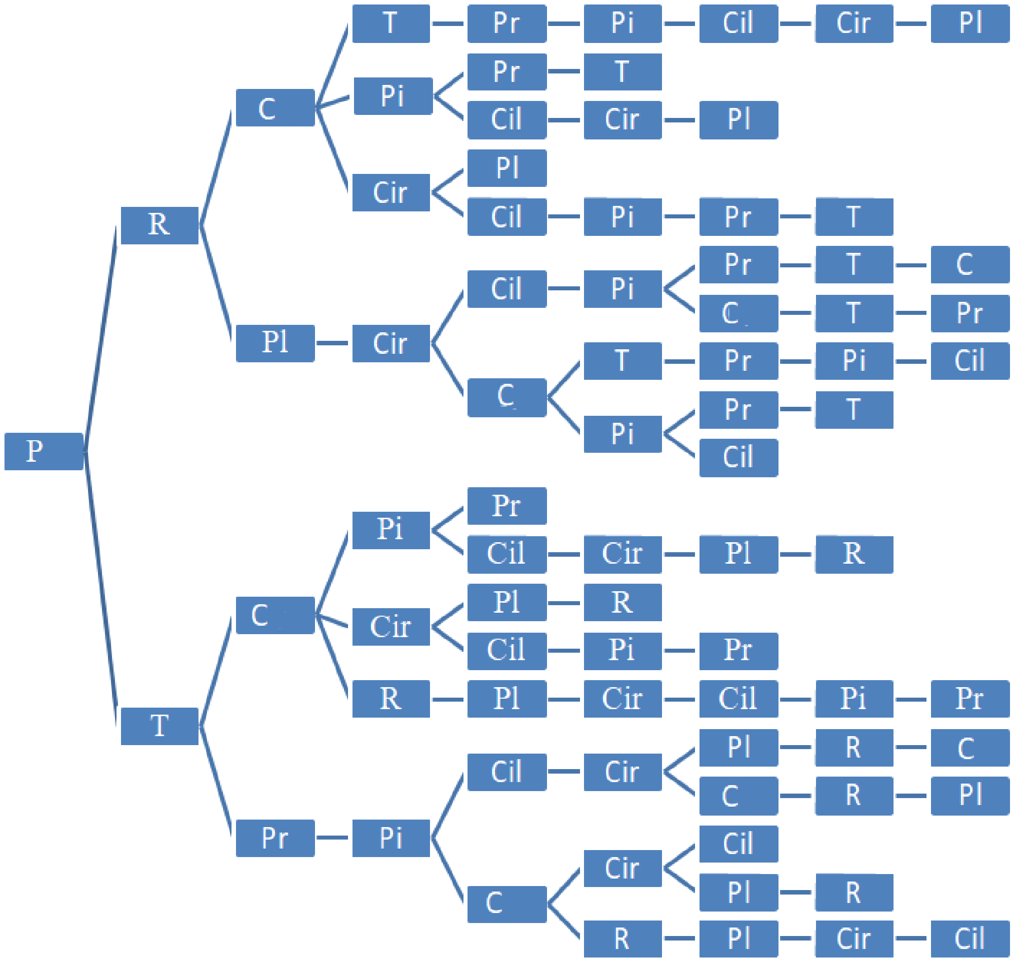
$$Media=\frac{8\cdot 8+4\cdot 7+4\cdot 6+2\cdot 5+2\cdot 4}{20}=\frac{134}{20}=6{,}7$$

O tempo medio dun percorrido é 6,7 segundos

c) Nas imaxes vemos que o último destino cilindro pasa dúas veces, así que no total son 4 veces dos 20 percorridos posibles. Así que P(rematar en cilindro) = 4/20= 0,2

Así que o 20% dás veces rematamos no cilindro

No caso de preferir o diagrama de árbore: comezando polo Punto e vendo as alternativas posibles, para facilitar asumimos que: Punto (P); Recta (R); Plano (Pl); Triángulo (T); Cadrado (C); Círculo (Cir); Prisma (Pr); Pirámide (Pi); Cilindro (Cil)



b)

Como se ve polo diagrama, teremos 20 camiños posíbeis.

- 8 camiños que tardan 8 segundos
- 4 camiños que tardan 7 segundos
- 4 camiños que tardan 6 segundos
- 2 camiños que tardan 5 segundos
- 2 camiños que tardan 4 segundos

Entón, nun total de 20 camiños, a media de tempo será:

$$Media=\frac{8\cdot 8+4\cdot 7+4\cdot 6+2\cdot 5+2\cdot 4}{20}=\frac{134}{20}=6{,}7$$

O tempo medio dun percorrido é 6,7 segundos

c) Nun total de 20 camiños, 4 deles rematan en cilindro.

Así que P(rematar en cilindro) = 4/20= 0,2 , entón o 20% dás veces rematamos no cilindro.

4.- OS ANOS NON SON UN PROBLEMA

Dúas coñecidas atópanse na rúa despois de moito tempo e, para poñerse ao día, falan das súas familias mantendo a seguinte conversa:

- A suma das idades dos meus fillos é 14 - dime aquela orgullosa nai -. E o produto é precisamente o número que teño estampado na miña camiseta. Como che gusta resolver problemas, mira a ver se consegues descubrir cantos anos ten cada un.

- Mirei a camiseta e fixen uns cálculos e díxenlle á miña amiga, con só eses datos non chego á solución.

- Pois entón dígoche que o do medio quedou hoxe na casa porque está enfermo.

- Ah, entón xa o sei.

Cales son as idades dos tres fillos?

Proposta de resolución:

Como nos di que o produto dás idades está na camiseta, saberíase cales son as idades se todos os produtos son distintos

Facemos unha táboa con todas as posibilidades:

Idade fillo 1	Idade fillo 2	Idade fillo 3	Suma	Produto
1	1	12	14	12
1	2	11	14	22
1	3	10	14	30
1	4	9	14	36
1	5	8	14	40
1	6	7	14	42
2	2	10	14	40
2	3	9	14	54
2	4	8	14	64
2	5	7	14	70
2	6	6	14	72
3	3	8	14	72
3	4	7	14	84
3	5	6	14	90
4	4	6	14	96
4	5	5	14	100

Repítense os valores:

40: (1 , 5, 8) e (2, 2, 10)

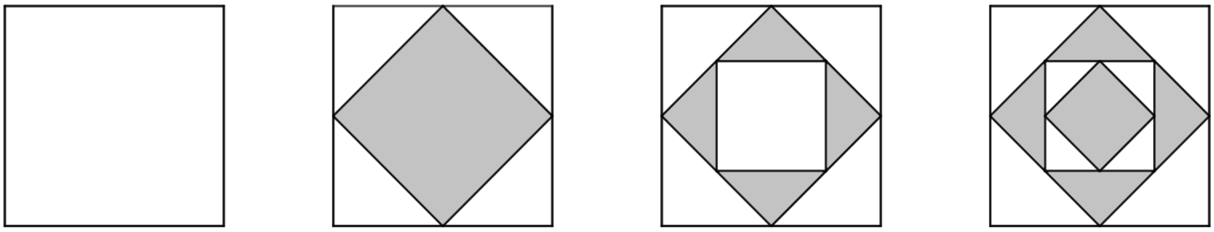
72: (2 , 6, 6) e (3, 3, 8)

O dato de que o do medio está enfermo, fai que as ternas de números na que se repite algún non sexa válido

Así que as idades dos fillos son: 1, 5 e 8 anos

5.- CADRADOS E DIAMANTES

A serie que ves na imaxe realizouse collendo un cadrado en branco, marcamos os puntos medios dos lados, unimos e coloreamos o cadrado que se forma. Despois unimos os puntos medios do cadrado coloreado (diamante) e coloreamos en branco o novo cadrado. Estes son os catro primeiros pasos:



Á vista desta serie, formulamos as seguintes cuestións:

a) Cantos cadrados  e cantos diamantes  encontraremos no paso 10? E no 100?

Xeneraliza para calquera número de pasos.

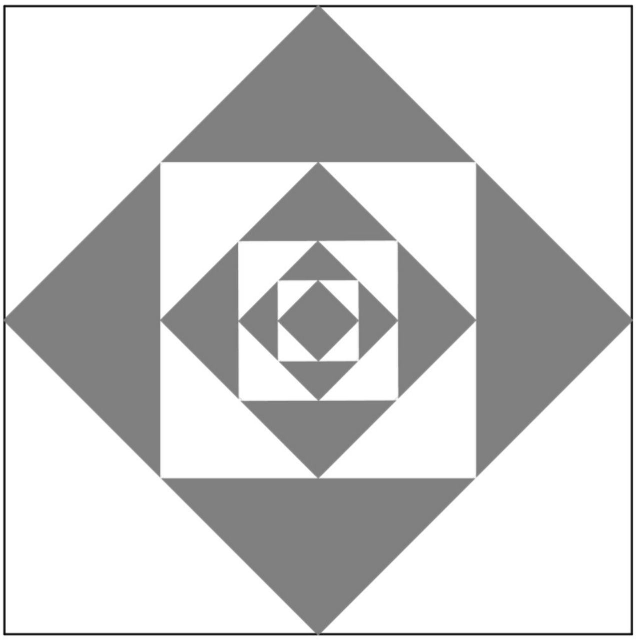
b) De que cor será a rexión central no paso 10? E no 67? E en xeral?

c) Haberá máis superficie branca ou gris no paso 10? É así en tódolos pasos?

d) Cantos triángulos brancos e cantos grises hai nun paso calquera (n)?

Proposta de resolución:

Paso 8, superficie de cada figura nova que se incorpora con respecto a anterior e considerando a inicial como 1



$$S_1 = 1 \qquad S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \qquad S_4 = \frac{1}{8}$$

$$S_5 = \frac{1}{16} \qquad S_6 = \frac{1}{32}$$

$$S_7 = \frac{1}{64} \qquad S_8 = \frac{1}{128}$$

a) Vemos que:

- No paso 1 - 1 cadrado e 0 diamantes
- No paso 2 - 1 cadrado e 1 diamante
- No paso 3 - 2 cadrados e 1 diamante
- No paso 4 - 2 cadrados e 2 diamantes
- No paso 5 - 3 cadrados e 2 diamantes
- No paso 6 - 3 cadrados e 3 diamantes

Ou sexa, entendemos que nos pasos pares, a metade do número do paso dános a cantidade de cadrados e de diamantes, respectivamente.

Ou sexa, no paso 10 teremos 5 cadrados e 5 diamantes, e no paso 100 teremos 50 cadrados e 50 diamantes.

Así:

Paso n: Se n é impar hai (n+1)/2 cadrados e (n-1)/2 diamantes.

Se n é par hai n/2 cadrados e n/2 diamantes.

b)Vemos que a rexión central:

- No paso 1 - branco

• No paso 2 - gris

• No paso 3 - branco

• No paso 4 - gris

Ou sexa, vemos que nos pasos pares, a rexión central é gris e nos pasos impares é branca.

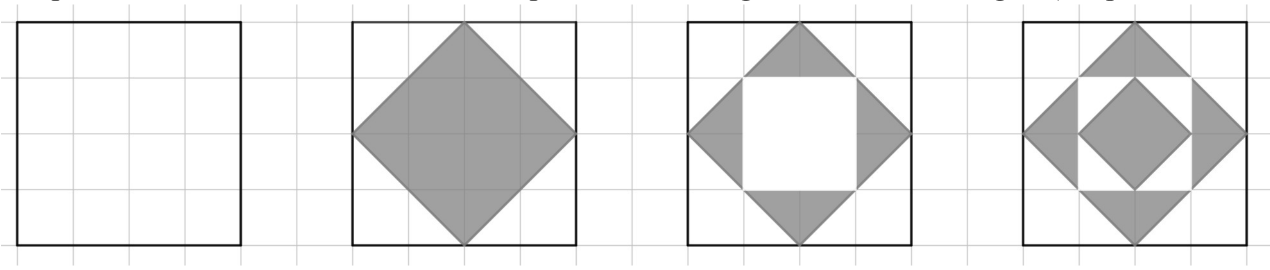
Entón, no paso 10 a rexión central será gris e no paso 67 será branca.

Xeneralizando: se n é par, a rexión central é gris e se n é impar é branca.

c) Hai mais superficie branca en calquera paso menos no segundo que as dúas superficies son iguais.

Colocando unha cuadrícula sobre o debuxo vemos o seguinte:

No paso 1 teremos máis área branca. No paso 2 teremos igual área branca ca gris (xa que o



diamante ten a metade da área do cadrado). No paso 3, a área gris é a metade da pintada de branco, polo que pasamos a ter maior área branca.

Considerando a área do cadrado inical 1, e como pen cada paso a superficie da nova figura é a metade da anterior

$B_1 = 1$

$B_2 = \quad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$B_3 = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ a B_2 engadímoslle $\frac{1}{4}$

$B_4 = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ a B_2 engadímoslle $\frac{1}{8}$

$B_5 = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ a B_4 engadímoslle $\frac{1}{16}$

$B_6 = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ a B_4 engadímoslle $\frac{1}{32}$

$B_7 = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ a B_6 engadímoslle $\frac{1}{64}$

Así:

n-par $B_n= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+.....+\frac{1}{2^{n-1}}$

n-impar $B_n= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+.....+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}$

Nos pasos pares a área branca sempre medra , a razón de 1/4 con respecto a dous pasos antes, e nos pasos impares a área branca é maior

d) Vemos que:

- No modelo 1 - 0 triángulos brancos e 0 triángulos gris
- No modelo 2 - 4 triángulos brancos e 0 triángulos gris
- No modelo 3 - 4 triángulos brancos e 4 triángulos gris
- No modelo 4 - 8 triángulos brancos e 4 triángulos gris
- No modelo 5 - 8 triángulos brancos e 8 triángulos gris

A vista disto nos pasos pares, teremos o dobre de triángulos brancos e o dobre menos 4 de triángulos gris, respectivamente. Nos pasos impares, teremos o dobre da orde anterior de triángulos brancos e o dobre da orde anterior de triángulos gris. Así:

Se n é impar hai 2·(n-1) triángulos brancos e 2·(n-1) triángulos grises.
Se n é par hai 2n triángulos brancos e 2n-4 triángulos grises.