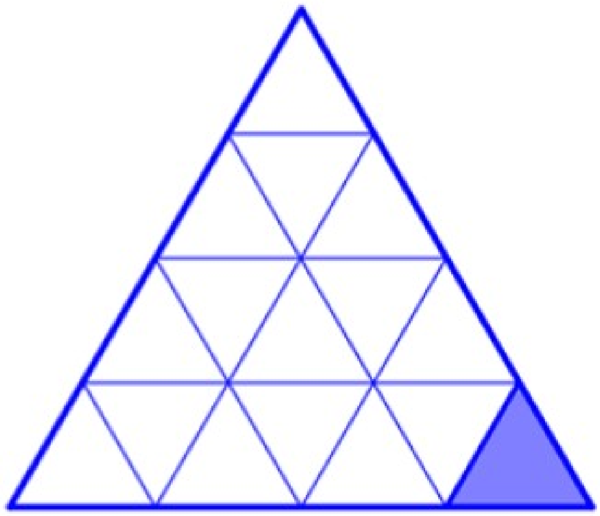
MATEMÁTICAS NA RAIA - 2015

1. TRIÁNGULOS E MAIS TRIÁNGULOS

a) O triángulo da figura é equilátero e foi dividido en 16 triángulos equiláteros iguais.

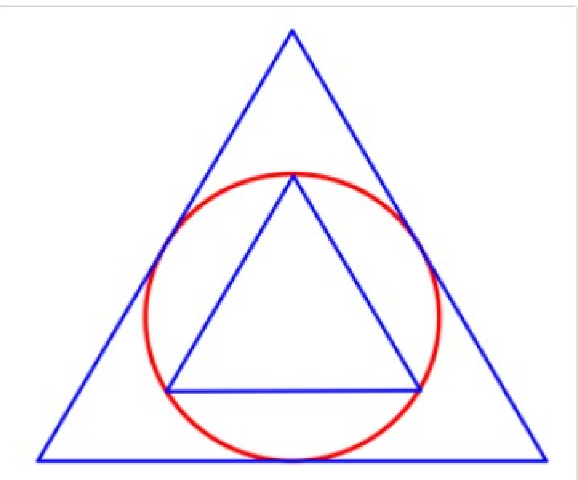
Escribe unha expresión que relacione o perímetro do triángulo grande co perímetro dun dos triángulos pequenos.



b) Observade agora na figura seguinte a un círculo "oprimido" e lede atentamente as súas lamentacións:

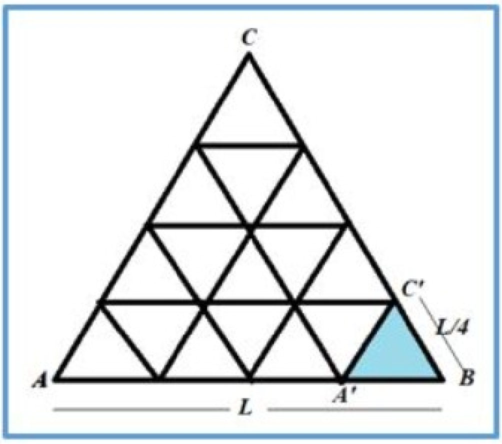
"Son un pobre círculo oprimido por 2 triángulos equiláteros. Son tanxente a cada un dos lados do triángulo grande. E cada un dos tres vértices do triángulo máis pequeno atópase na miña circunferencia. Ás veces pregúntome cantos *triángulos pequenos* serían necesarios para igualar a superficie do triángulo grande. Que pensades vos

Pensade e explicade o voso razoamento.



Proposta de resolución:

a) Consideramos L a lonxitude de cada lado do triángulo grande, polo tanto o seu perímetro é 3L



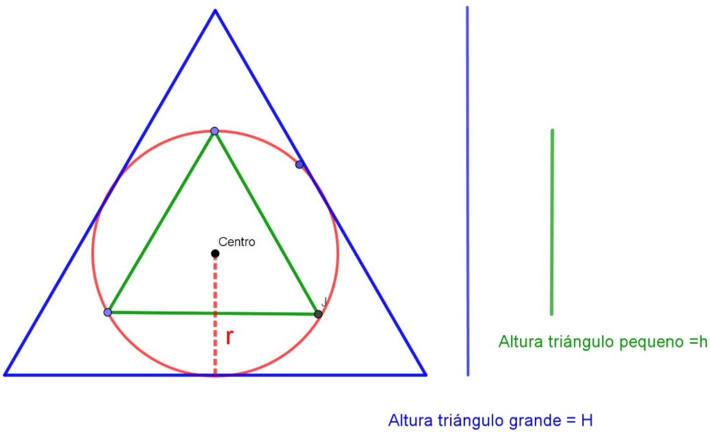
Como a cada lado do triángulo grande lle corresponden 4 lados dos triángulos pequenos, entón cada lado será de L/4, e polo tanto o seu perímetro é $\frac{3L}{4}$

Así a relación de proporcionalidade é: $\frac{3L}{\frac{3L}{4}}=4$

É dicir o perímetro do tiángulo garnde é o cuádruplo do perímetro do triángulo pequeno

Se p é perímetro do triángulo pequeno e P o perímetro do triángulo grande, a relación entre perímetros é: $\underline{\mathbf{P_{triángulo\ grande}= 4\cdot p}}$

b) A circunferencia vermella está inscrita no triángulo azul e circunscrita ao triángulo verde,



Polas propiedades das mesmas:

O radio da circunferencia inscrita a un triángulo equilátero é igual a un terzo da altura do triángulo.

Relación de r con H : $r=\frac{1}{3}H$

O radio da circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero é igual a dous terzos da altura do triángulo: Relación de r con h: $r=\frac{2}{3}h$

Así: $\frac{H}{3}=\frac{2h}{3}\Rightarrow H=2h$ **Por tanto no triángulo grande caben 3 triángulos pequenos**

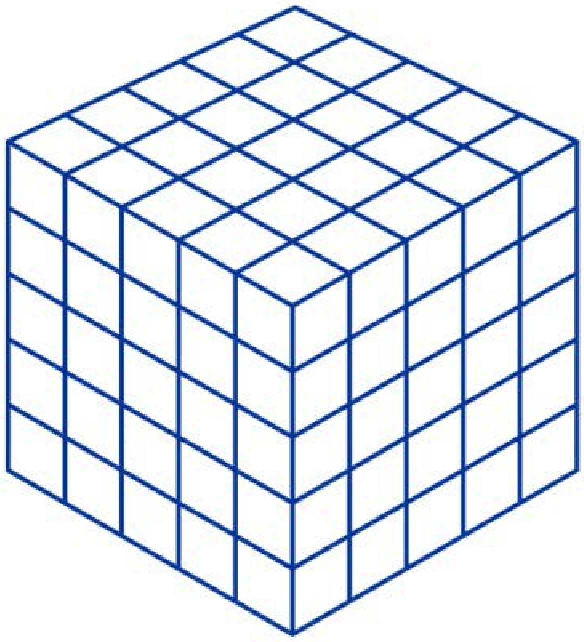
2. CUBOS PINTADOS

Temos un cubo grande formado por cubiños pequenos 5 x 5 x 5 tal e como se ve na figura. Mergullamos o cubo en pintura. Esperamos a que seque e rompemos o cubo nos pequenos cubos unitarios representados pola grella.

a) Cantos cubiños terán unha soa cara pintada? Cantos terán dúas caras pintadas? E tres? E ningunha?

b) Contestade ás mesmas preguntas do apartado anterior, partindo dun cubo 10x10x10.

c) Poderiades contestar as mesmas preguntas dos apartados anteriores para o caso dun cubo n x n x n?



Proposta de resolución

a) Un cubo ten tres elementos principais caras, arestas e vértices . No noso caso dun cubo 5 x 5 x 5 está formado por 125 cubiños que estarán pintados da seguinte maneira:

8 vértices: 8 cubos con tres caras pintadas

12 arestas : eliminando os 2 cubiños do vértices, temos tres cubiños con dúas caras pintadas, polo tanto en total $12 \cdot 3 = 36$ cubiños

6 caras: sen contar os cubiños dos vértices e os das arestas quedarían unha grella de 3 x 3, ou sexa 9 cubos con unha soa cara pintada en cada cara. Así en total $6 \cdot 9 = 54$

Sen ningunha cara pintada serán os interiores, esto sería sacar toda a capa externa e quedaríanos un cubo 3 x 3 x 3 que está formado por 27 cubiños

Temos entón:

Cubiños con 3 caras pintadas	Cubiños con 2 caras pintadas	Cubiños con 1 caras pintadas	Cubiños con 0 caras pintadas	Total cubiños
8	36	54	27	125

b) No noso caso dun cubo 10 x 10 x 10 está formado por 1000 cubiños que estarán pintados da seguinte maneira:

8 vértices: 8 cubos con tres caras pintadas

12 arestas : eliminando os 2 cubiños do vértices, temos 8 cubiños con dúas caras pintadas, polo tanto en total $12 \cdot 8 = 96$ cubiños

6 caras: sen contar os cubiños dos vértices e os das arestas quedarían unha grella de 8 x 8, ou sexa 64 cubos con unha soa cara pintada en cada cara. Así en total $6 \cdot 64 = 384$

Sen ningunha cara pintada serán os interiores, esto sería sacar toda a capa externa e quedaríanos un cubo 8 x 8 x 8 que está formado por $8^3 = 512$ cubiños

Temos entón:

Cubiños con 3 caras pintadas	Cubiños con 2 caras pintadas	Cubiños con 1 caras pintadas	Cubiños con 0 caras pintadas	Total cubiños
8	96	384	512	1000

c) No noso caso dun cubo n x n x n está formado por n^3 cubiños que estarán pintados da seguinte maneira:

8 vértices: 8 cubos con tres caras pintadas

12 arestas : eliminando os 2 cubiños dos vértices, temos n-2 cubiños con dúas caras pintadas, polo tanto en total $12 \cdot (n-2) = 12n - 24$ cubiños

6 caras: sen contar os cubiños dos vértices e os das arestas, ou sexa retirando o borde quedarían unha grella de $(n-2) \times (n-2)$, ou sexa $(n-2)^2$ cubos con unha soa cara pintada en cada cara.

Así en total $6 \cdot (n-2)^2 = 6 (n^2 - 4n + 4) = 6n^2 - 24n + 24$

Sen ningunha cara pintada serán os interiores, esto sería sacar toda a capa externa e quedaríanos un cubo $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$ que está formado por $(n-2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8$ cubiños

Temos entón:

Cubiños con 3 caras pintadas	Cubiños con 2 caras pintadas	Cubiños con 1 caras pintadas	Cubiños con 0 caras pintadas	Total cubiños
8	$12n - 24$	$6n^2 - 24n + 24$	$n^3 - 6n^2 + 12n - 8$	n^3

3. UN PROBLEMA DE NÚMEROS

a) Os números do 1 ao 4000 colócanse en catro columnas do seguinte xeito:

A	**B**	**C**	**D**
1	2	3	**A**
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
17	.	.	.

En cal das catro columnas estará o número 2015? Razoa a túa resposta.

b) Tes que escribir unha conta que dea como resultado exactamente 100, pero tes que cumprir as seguintes regras: deberás empregar todas as cifras do 1 ao 9 seguindo o seu orde correlativo e só poderás utilizar tantos signos + e - como queiras, pero este último signo non debe colocarse antes do primeiro número.

Proposta de resolución

a) Se nos fixamos na táboa os 4 números que forman as filas, van en orde crecente nas filas impares e en orde decrecente nas filas pares.

Calculamos cantos bloques de 4 números caben en 2015 :

2015 : 4 = 503.75 , isto indica que a nosa táboa terá 504 filas pero na última só 3 números e por ser par vai en orde decrecente:

A	**B**	**C**	**D**
1	2	3	**A**
8	7	6	5
.	.	.	.
.	.	.	.
2009	2010	2011	2012
.	**2015**	2014	2013

b) Hai varias solucións, algunha delas:

1 + 2 + 3 – 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100

1 + 23 – 4 + 56 +7 + 8 + 9 = 100

1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100

1 + 23 – 4 + 5 + 6 +78 - 9 = 100

12 + 3 – 4 + 5 + 67 + 8+ 9 = 100

12 - 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 89 = 100

12 + 3 + 4 + 5 – 6 - 7 + 89 = 100

123 – 4 - 5 - 6 – 7 + 8 - 9 = 100

123 - 45 - 67 + 89 = 100

123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100

123 + 45 – 67 + 8 - 9 = 100

4. DUELO TRIANGULAR

García, Vidal e Silva están na praia e enfróntanse nun duelo triangular de auga, os tres rapaces, colocados nos tres vértices dun triángulo equilátero teñen un caldeiro de auga cada un. Un sorteo decide quen fará o primeiro lanzamento (García neste caso).

García dispara ao adversario elixido por el. Se consegue mollalo, estará eliminado e sería o terceiro participante o seguinte en lanzar, mentres que se queda seco correspóndelle a el disparar o segundo caldeiro sempre contra o adversario que elixa. Se o último rapaz non queda mollado lanza a súa vez contra o que segue seco ou contra algún dos adversarios, no caso de que os dous primeiros estean aínda secos.

Os tres teñen igual destreza: á distancia fixada son capaces de facer branco nun adversario na metade dos lanzamentos. A elección do branco só será ditada por consideracións de eficacia.

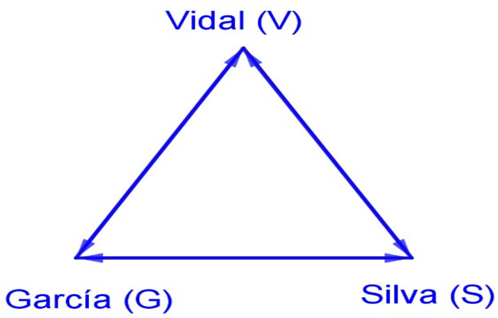
a) Que debe facer García para saír mellor parado: tirar a dar ou a fallar?

b) Que risco de mollarse corre García (probabilidade expresada mediante unha fracción) entendendo que se comporta do xeito máis intelixente posible?

c) O feito de lanzar primeiro, é unha vantaxe ou unha desvantaxe?

Proposta de resolución

Denotamos coa inicial cada un dos rapaces e simbolizamos en verde se non é eliminado e en vermello se é eliminado



Escribimos todos os posibles resultados se primeiro lle tira a Vidal e o mesmo ocorrerá se lle tira a Silva

<table>
<tr><td rowspan="12">G</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="2">G</td><td>S</td><td>G</td><td></td><td>Seco</td></tr>
<tr><td>S</td><td>G</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G</td><td>S</td><td>V</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td>S</td><td>V</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">S</td><td>G</td><td></td><td></td><td>Seco</td></tr>
<tr><td>G</td><td></td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td rowspan="4">S</td><td rowspan="2">G</td><td>V</td><td>G</td><td></td><td>Seco</td></tr>
<tr><td>V</td><td>G</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G</td><td>V</td><td>S</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td>V</td><td>S</td><td></td><td>Mollado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S</td><td rowspan="2">V</td><td>G</td><td></td><td></td><td>Seco</td></tr>
<tr><td>G</td><td></td><td></td><td>Mollado</td></tr>
</table>

a) Se tira a dar sae mollado 3/4 partes dás veces, é dicir o 75% , e se tira a fallar só sae mollado a metade dás veces, ou sexa o 50%.

Así que mellor tirar a fallar

b) Probabilidade = 2/4 =50%

c) A vista da táboa o que lanza primeiro o 75% das veces acaba mollado, polo tanto é mellor non ser o primeiro

5.A VIÚVA

Catro mulleres (Ana, Beatriz, Carla e Dora) e tres homes (Eduardo, Fernando e Gustavo) xúntanse tódalas noites para xogar ás cartas. Dispoñen dunha baralla para catro xogadores.

a) Homes e mulleres forman tres matrimonios. Hai ademais unha viúva.
b) Os membros dun matrimonio non son nunca compañeiros na mesma partida.
c) Non hai máis dun matrimonio xogando na mesma partida.
d) Unha noite na que xogaron catro partidas distribuíronse así:

Ana e Eduardo	contra	Beatriz e Fernando
Ana e Gustavo	contra	Dora e Fernando
Beatriz e Carla	contra	Fernando e Gustavo
Carla e Eduardo	contra	Dora e Gustavo

Quen é a viúva? Explicade como chegades a esa conclusión

Proposta de resolución

Colocamos os datos nunha táboa:

	Eduardo	Fernando	Gustavo
Ana	X		X
Beatriz		X	
Carla	X		
Dora		X	X

Con estes datos Ana só pode estar casada con Fernando e Dora con Eduardo ou algunha delas viúva.

Analizamos os tre casos

Se Ana = Fernando e Dora= Eduardo : (3ºpartida) entón Beatriz= Gustavo ou Carla = Gustavo
(4ª partida) Carla ≠ Gustavo o que nos obrigaría a que Carla fose a viúva

Se Ana é a viúva: Dora= Eduardo e na 2ª partida non teríamos ningún matrimonio e na 3ª serían dous matrimonios, o que non é posible.

Se Dora é a viúva: Beatriz = Eduardo e como Ana= Fernando a 1ª partida non sería posible

Por tanto os matrimonios son: Ana = Fernando , Dora= Eduardo e Beatriz= Gustavo

<u>A viúva é Carla</u>