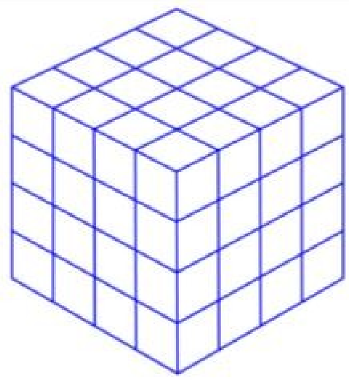
MATEMÁTICAS NA RAIA – 2016

1. Un cubo feito de cubos…

A imaxe mostra un cubo construído a partir de cubos máis pequenos, todos do mesmo tamaño, aos que poderíamos chamar cubos unidade, cuxas caras serían caras unidade, e as súas arestas, non sendo moi orixinal… arestas unidade.

Desta maneira, o noso cubo tería de aresta catro (catro arestas unidade), e poderíamos dicir que é de dimensión 4 x 4 x 4.



A) Pintamos as seis caras exteriores do cubo grande. Agora retiramos a capa exterior de cubos unidade que pintamos, como se lle quitásemos unha capa a unha cebola. Apartamos a un lado, sen perdelos, os cubos que retiramos e seguimos. No cubo que nos quedou agora, volvemos a pintar as seis caras exteriores. Unha vez pintado, collemos os seus cubos unidade e poñémolos cos que retiramos antes.

Que porcentaxe de caras unidade temos pintadas respecto do total?

B) E o mesmo pero con un cubo inicial de 10 x 10 x 10. É dicir, partimos dun cubo de 10 x 10 x 10. Pintámolo e retiramos a capa de cubos unidade que pintamos. Volvemos a pintar e a retirar a seguinte capa de cubos. E seguimos así ata que teñamos pintado (parcialmente) e retirado todos os cubos unidade.

Que porcentaxe de caras unidade temos pintadas?

C) Agora só imos a pintar unha vez (non imos a retirar capas de cubos unidade para volver a pintar nin nada, simplemente pintamos o cubo grande que teñamos).

Que dimensión debe ter o cubo para que ao pintalo, o número de caras unidade non pintadas sexa igual ao número de caras unidade pintadas?

D) E se queremos que as caras non pintadas sexan cinco veces as caras pintadas?

Proposta de resolución:

a) Hai que ter en conta que o número de caras unidade que se pintan nun cubo 4x4x4 serán $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$ (16 caras unidade por cada unha das caras do cubo grande).

Ao retirar a "capa externa", quedamos cun cubo de dimensións 2x2x2, do que pintaremos $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ caras unidade

O cubo inicial tería un total de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 384$ caras unidade, polo que a porcentaxe de caras unidade pintadas sería igual a $\frac{96+24}{384} \cdot 100 = 31{,}25\%$

b) O cubo de dimensión 10x10x10 terá $6 \cdot 10^3 = 6000$ caras unidade. No primeiro paso pintamos as caras exteriores, polo que pintaremos $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600$ caras unidade.

Logo de retirar a capa exterior, quédanos un cubo de dimensións 8x8x8. Ao pintalo, estaremos pintando $6 \cdot 8 \cdot 8 = 288$ caras unidade.

Seguimos o proceso cos cubos que imos obtendo, tendo en conta que en cada paso a dimensión diminúe en 2 unidades (teríamos cubos de dimensión 6, logo de 4 e finalmente de 2). Tamén podemos ver que as caras unidade que se pintan en cada cubo de dimensión nxnxn son $6 \cdot n^2$. A partir de aquí teríamos que:

Caras pintadas: $6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 8^2 + 6 \cdot 6^2 + 6 \cdot 4^2 + 6 \cdot 2^2 = 1320$

Porcentaxe de caras pintadas: $\frac{1320}{6000} \cdot 100 = 22\%$

c) No apartado anterior vimos que as caras unidade pintadas nun cubo de dimensión

$n \cdot n \cdot n$ serán $6 \cdot n^2$, mentres que o total de caras unidade dese mesmo cubo serán $6 \cdot n^3$.

A proporción entre caras pintadas e caras totais será:

$$\frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}$$

Polo tanto, no caso n = 2, as caras pintadas serán a metade das totais.

d) Seguindo co argumentado no apartado anterior, no caso n=6, as caras pintadas serán 1/6 do total, polo que as non pintadas serían os 5/6, é dicir, cinco veces máis.

2. Xuntos pero non revoltos

Catro matemáticos de catro xeracións (avó, pai, fillo e neto) reúnense na fronteira galaico-portuguesa para un encontro científico con catro físicos, catro químicos e catro biólogos, todos eles coa mesma relación de parentesco.

Como os científicos son tan peculiares, queren sentar en 16 bancos formando un cadrado e de xeito que en cada fila, en cada columna e en cada diagonal estea un avó, un pai, un fillo e un neto, e ademais un representante de cada rama científica.

Podedes dicirlle a cada un onde debe sentarse?

Proposta de resolución:

Este problema é similar a resolver un sudoku, non deben repetirse características na columna, na fila e nas diagonais.

Empezamos por colocar por orde crecente de idade a un neto, un fillo, un pai e un avó na 1ª columna, e as ciencias ordenarémolas, por exemplo, por orde alfabética: bioloxía, física, matemáticas e química. E na 2ª fila colocaremos de novo as catro ciencias pero alternando a orde controlando as diagonais para que non se repitan. Así a 1ª e 2ª fila:

Neto Biólogo	Fillo Físico	Pai Matemático	Avó Químico
Avó Matemático	Pai Químico	Fillo Biólogo	Neto Físico

Xa imos tendo menos opcións tendo en conta non repetir e que as únicas posibilidades das diagonais son matemático na 2ª columna e físico na 3ª columna, e agora analizamos as idades que podemos poñer, neto e avó na 2ª e 3ª columna, as ciencias na 1ª columna debe ir químico e na 4ª biólogo para non repetir, unha opción é:

Neto Biólogo	Fillo Físico	Pai Matemático	Avó Químico
Avó Matemático	Pai Químico	Fillo Biólogo	Neto Físico
Fillo Químico	Neto Matemático	Avó Físico	Pai Biólogo

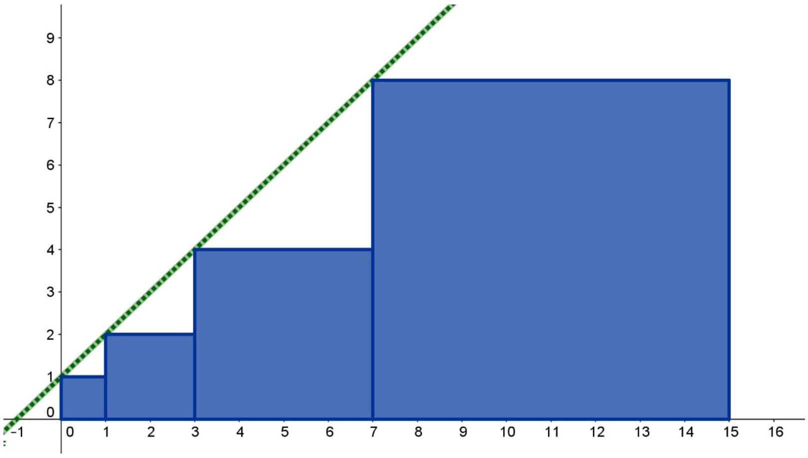
E entón está clara a última fila quedando resolto:

Neto Biólogo	Fillo Físico	Pai Matemático	Avó Químico
Avó Matemático	Pai Químico	Fillo Biólogo	Neto Físico
Fillo Químico	Neto Matemático	Avó Físico	Pai Biólogo
Pai Físico	Avó Biólogo	Neto Químico	Fillo Matemático

Evidentemente podes permutar todas as relacións de parentesco entre si (24 posibilidades) e todas as ciencias (24 distintas), o que daría $24 \cdot 24 = 576$ posibilidades, pero non serían fundamentalmente distintas

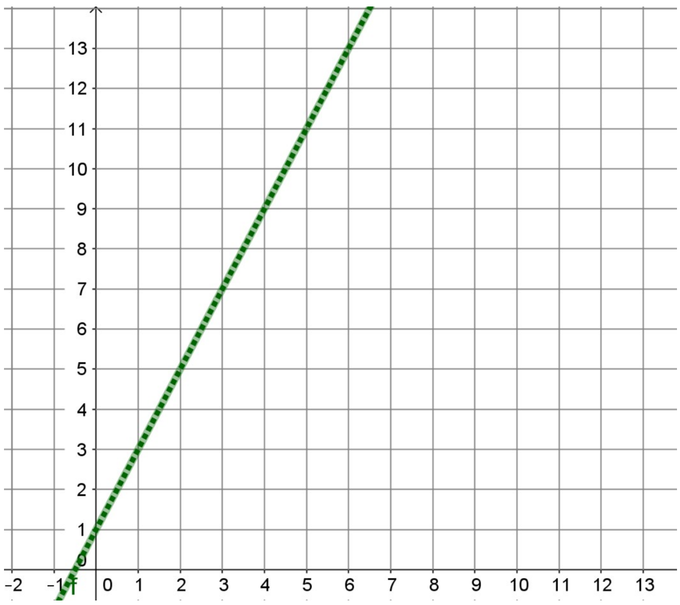
3. Cadrados á sombra

Colocamos cadrados baixo unha recta tal e como se pode ver na figura:



a) Cales serían as coordenadas dos vértices superiores do seguinte cadrado (o 5º da serie)? E do cadrado 10º?

b) Temos agora a seguinte recta:



Se colocásemos cadrados baixo esta recta do mesmo xeito que no apartado anterior, calcula as coordenadas dos vértices superiores dos que ocupan o lugar 5º e 10º da serie.

Proposta de resolución:

A) Os puntos son:

1º cadrado (0,1), (1,1); 2º cadrado (1,2), (3,2);

3º cadrado (3,4), (7,4); 4º cadrado (7,8), (15,8);

5º cadrado (15,16), (31,16)

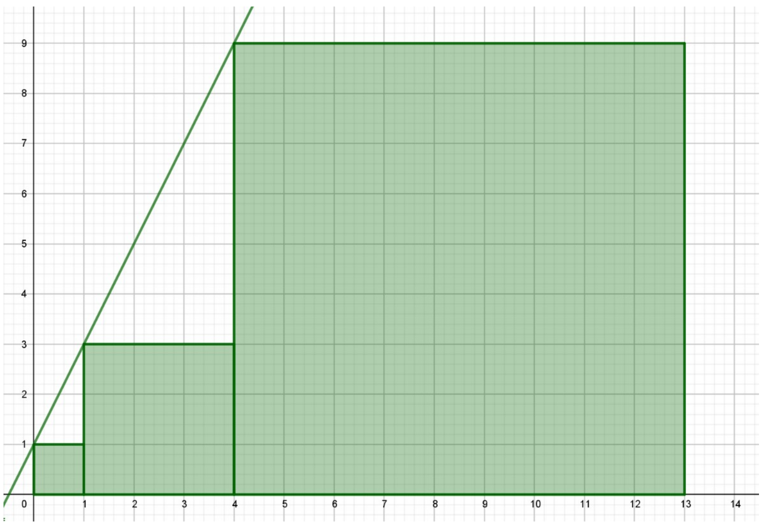
Podemos xeneralizar: n-Cadrado

Vértice superior esquerdo: $(x, y) = (2^{n-1} - 1, x+1)$

Vértice superior dereito: $(x+y, y)$

Así, 10º cadrado: (511,512), (1023,512).

B)



A nosa recta é $y = 2x + 1$

1º cadrado (0,1), (1,1); 2º cadrado (1,3), (4,3);

3º cadrado (4,9), (13,9); 4º cadrado (13,27), (40,27);

5º cadrado (40,81), (121,81)

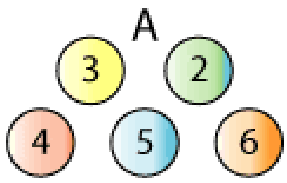
Vértice superior esquerdo: $(x, y) = \left(\frac{y-1}{2}, 3^{n-1}\right)$

Vértice superior dereito: $(x+y, y)$

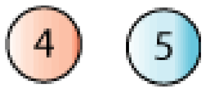
Así, 10º cadrado (9841,19683), (29524,19683).

4. Quen gaña?

A) Temos un conxunto de bólas numeradas para un xogo:



Para xogar, as bólas son mesturadas e elíxense dúas xuntas ao chou. Por exemplo:

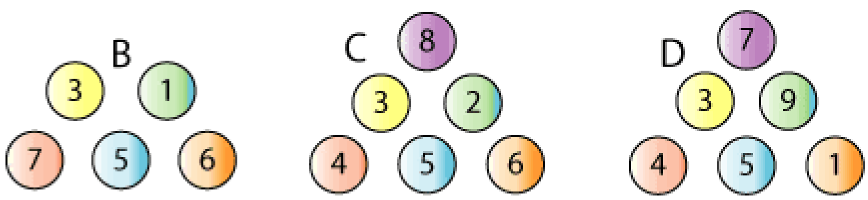


Os números das dúas bólas súmanse: 4+5=9

Se o total é par, gañas. Se é impar, perdes.

Podes xustificar se se trata dun xogo xusto ou non?

B) Temos agora tres novos conxuntos de bólas:



Cal deles elixirías para optimizar as túas opcións de vitoria?

C) Que porcentaxe de veces esperarías gañar?

D) É posible crear un conxunto de 5 bólas numeradas (con cifras diferentes en cada unha delas, do 1 ao 9) que dean lugar a un xogo xusto?

Proposta de resolución:

A)

Como hai 5 números, isto significa que temos 10 maneiras de sumalos de dous en dous, 4 do primeiro cos outros 4, 3 do segundo cos outros 3, 2 do terceiro cos outros dous e 1 do cuarto co quinto.

Os valores que temos son: 2, 3, 4, 5 e 6, son 3 pares e dous impares.

Os tres números pares dan lugar a 3 sumas distintas todas elas pares (2+4, 2+6, 4+6). Os dous valores impares sumados dan un valor par (3+5). Cada impar podémolo sumar con tres pares e sae impar, polo tanto temos 6 impares (3+2, 3+4, 3+6, 5+2, 5+4, 5+6).

Polo tanto é un xogo inxusto ganas o 40% das veces e perdes o 60%:

B)

No conxunto B temos 5 números , por tanto 10 maneiras de sumalos de dous en dous e empregando o razoamento do apartado anterior

No conxunto B hai 4 impares e 1 par entón : os 4 impares dan lugar a 6 sumas pares (1+3, 1+5, 1+7, 3+5, 3+7, 5+7) e o valor par (6) sumado con cada un dos impares son 4 valores impares. As mesmas posibilidades que o conxunto A

Nos conxuntos C e D temos 6 números polo tanto 15 sumas diferentes: 5+4+3+2+1 polo razoamento do apartado A

No conxunto C hai 4 pares e 2 impares entón : os 4 pares dan lugar a 6 sumas pares, os dous impares sumar par, entón temos 7 sumas pares. E cada impar da lugar a 4 sumas impares e como son 2 temos 8 impares.

No conxunto D hai 5 impares e 1par, entón os 5 impares dan lugar a 10 sumas pares. E o número par dá lugar a 5 sumas impares ao sumalo co resto.

Por estes resultados o conxunto co que temos mais posibilidades de gañar é o D

C)

Polo razoamento anterior no conxunto D, temos 10 sumas pares e 5 impares, por tanto as posibilidades de gañar son 10/15 = 0,67 ou sexa esperamos gañar o 67% dás veces

D)

O número de sumas é 10

Do apartado A sabemos que se hai 2 pares/impares e 3 impares/pares, temos 4 sumas pares e 6 sumas impares, polo apartado B sabemos que se temos 1 pares/impares e 4 impares/pares, temos 6 sumas pares e 4 sumas impares

As outras posibilidades son todos os números pares ou todos os números impares que daá lugar a sumas pares

Entón **non** podemos ter un xogo xusto con 5 bólas

5. Un fabricante de salsa de tomate listo

Un fabricante de salsa de tomate embala latas de 10 cm de diámetro en caixóns cadrados de 80 cm de lado.

Como un estudo de mercado lle indicou que esas latas eran demasiado grandes, o fabricante decide cambialas por outras cilíndricas, como as anteriores e da mesma altura pero de 5 cm de diámetro.

Para embalar as latas, o fabricante segue utilizando as mesmas caixas cadradas de 80 cm de lado, para aforrar cartos.

A) As caixas que conteñen as novas latas pequenas, conterán máis ou menos salsa de tomate que cando estaban cheas de latas grandes?

(Non se terá en conta o espesor das paredes das latas)

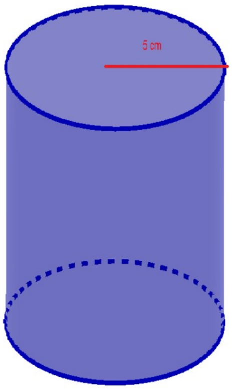
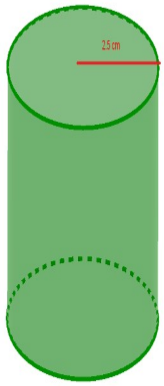
B) E se as latas foran de 6 cm de diámetro. As caixas que conteñen as novas latas non tan pequenas, conterán máis ou menos salsa de tomate que cando estaban cheas de latas grandes?

C) Cales deben ser as dimensións en valores enteiros do diámetro das latas, para que sempre usemos a mesma cantidade de salsa de tomate para encher as caixas?

Proposta de resolución:

A)
Nunha caixa cadrada de 80 cm de lado caben 8 latas de 10 cm de diámetro por lado pois 80 :10=8, por tanto en total $8^2 = 64$ latas. E caben 16 latas de 5 cm de diámetro por lado pois 80 : 5=16, por tanto en total $16^2 = 256$ latas.

Calculamos o volume das latas para saber canta salsa de tomate conteñen, chamámoslle h a altura das latas

	
$V= \pi \cdot 5^2 \cdot h = 25 \cdot \pi \cdot h$	$V= \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot h = 25 \cdot \pi \cdot h = 6{,}25 \cdot \pi \cdot h$

As 64 latas de 10 cm de diámetro terán un volume de : $64 \cdot 25 \cdot \pi \cdot h = 1600\, \pi\, h\ cm^3$

As 256 latas de 5 cm de diámetro terán un volume de : $256 \cdot 6{,}25 \cdot \pi \cdot h = 1600\, \pi\, h\ cm^3$

É dicir levan a mesma cantidade de salsa de tomate

B)
Como 80 : 6= 13,3, por tanto nunha caixa cadrada de 80 cm de lado caben 13 latas de 6 cm de diámetro por lado, por tanto en total $13^2 = 169$ latas

O volume destas latas será: $V= \pi \cdot 3^2 \cdot h = 9 \cdot \pi \cdot h$ cada unha, e entón $169 \cdot 9 \cdot \pi \cdot h= 1521\, \pi\, h\ cm^3$

Por tanto ao ser mais pequenas e non caber un número exacto conteñen menos salsa de tomate

C)

Sabemos polo apartado B que para non desperdiciar salsa o número de latas debe ser exacto, ou sexa un divisor das dimensións do lado da caixa. Como $80 = 2^4 \cdot 5$, temos 10 divisores pois $(4+1)\cdot(1+1)=10$, ou sexa o produto dos expoñentes aumentados nunha unidade

Divisores de 80: {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40,80}

E estes serán os diámetros das latas e todas elas teñen o mesmo volume que é de $1600\, \pi\, h\ cm^3$

pois nese caso se o diámetro é un divisor de 80, o radio da lata vai ser a metade.

Se lle chamamos n a ese divisor, o volume será:

$V_{total}= (80/n)^2 \pi \cdot (n/2)^2 \cdot h = \left(\frac{80}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{64000}{n^2} \cdot \frac{n^2}{4} \cdot \pi \cdot h = \frac{64000}{4} \cdot \pi \cdot h = 1600 \cdot \pi \cdot h$