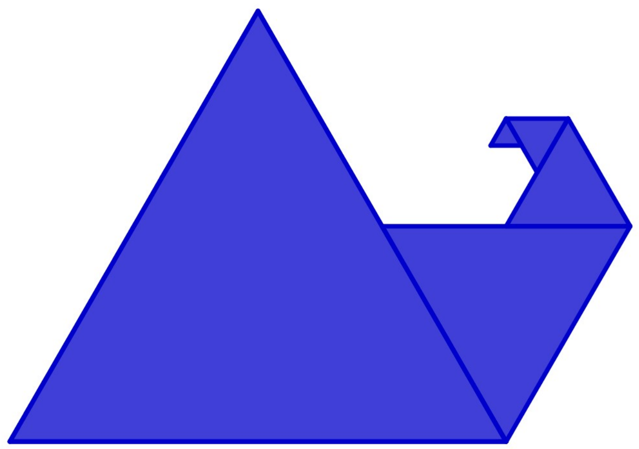
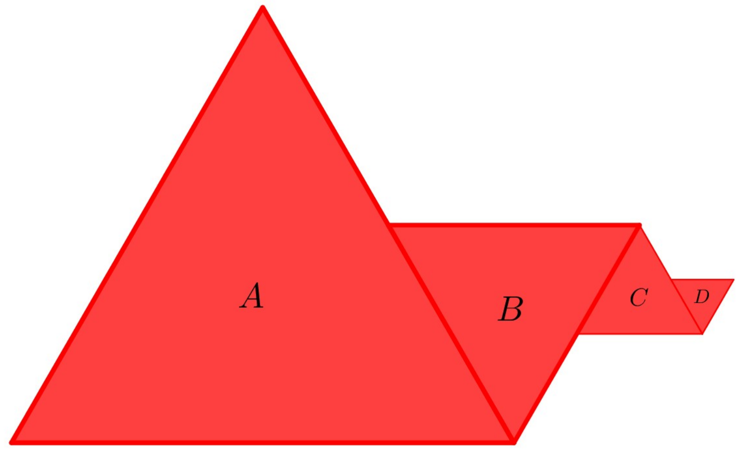
MATEMÁTICAS NA RAIA – 2017

1.- ENVOLTORIO TRIANGULAR

a) Con cinco triángulos equiláteros armouse a figura que aparece abaixo. O triángulo grande ten 82 cm de perímetro. O lado do triángulo mediano é a metade do lado do triángulo grande, o lado do triángulo pequeno é a metade do lado do triángulo mediano e así sucesivamente. Cal é o perímetro da figura?



b) Con 4 triángulos equiláteros construese a seguinte figura, cuxo perímetro é 48. O lado do triángulo B é a metade do lado do triángulo A, o lado do triángulo C é a metade do lado do triángulo B e o lado do triángulo D é a metade do lado do triángulo C. Calcular a área total da figura.



Proposta de resolución:

A) O perímetro do triángulo grande é 82 cm, entón o lado do maior triángulo é $\frac{82}{3}cm$ e como cada novo triángulo ten de lado a metade do anterior; entón o perímetro buscado é:

$$\frac{82}{3}+\frac{82}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{16}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{16}\times\frac{82}{3}+\frac{1}{16}\times\frac{82}{3}=\frac{861}{8}$$

B) Sexa x o lado do triángulo A, $\frac{x}{2}$ será o lado do triángulo B, $\frac{x}{4}$ o lado do triángulo C e $\frac{x}{8}$ o lado do triángulo D.

O perímetro é 62, entón:

$$2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{3x}{8}=62 \Leftrightarrow x=16$$

Así o lado do triángulo pequeno é 2, polo tanto a altura do triángulo pequeno é:

$$h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

A área do triángulo pequeno é: $D=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

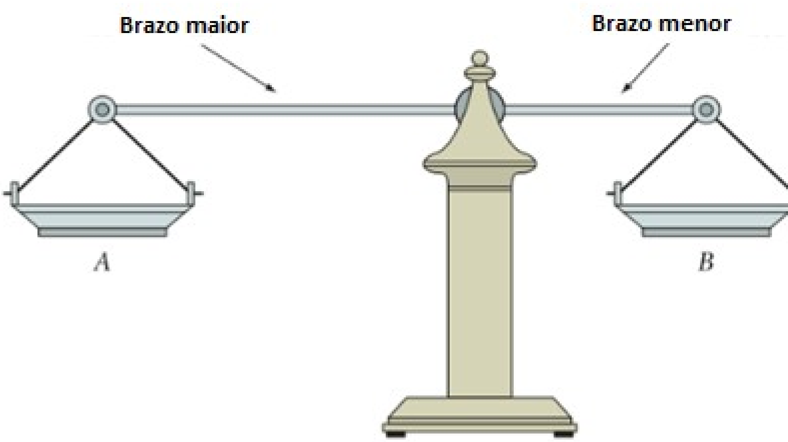
Como en C caben 4 triángulos D, en B 4 triángulos C, polo tanto, 16 triángulos D; entón A contén 64 triángulos D. Entón:

Área total:

$$A+B+C+D=64\sqrt{3}+16\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}=85\sqrt{3}$$

2: A BALANZA DESHONESTA

Unha balanza de brazos tiña un brazo maior ca o outro, como mostra a seguinte figura:



Para coñecer canto mentía a balanza sobre a verdadeira masa dun obxecto, fixéronse dous experimentos, usando bólas de ping-pong e cubos de plástico todos iguais entre si.

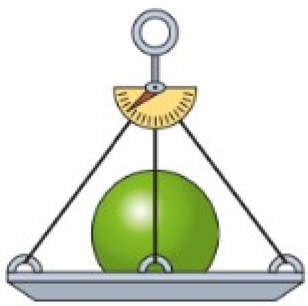
1.º Experimento:

- Tres bólas colocadas no prato A equilíbrase con oito cubos no prato B.

2.º Experimento:

- Un cubo no prato A equilíbrase con seis bólas no prato B.

Con unha balanza de precisión concluíuse que as bólas tiñan, cada unha, unha masa de 10g.
Cál é a verdadeira masa dun cubo de plástico?



1- Proposta de resolución:

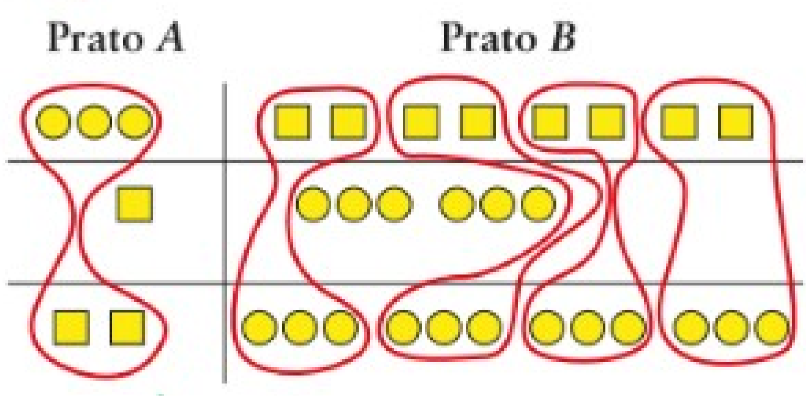
Sabemos que unha bóla pesa 10g. Entón, 3 bólas pesan 30g e 6 bólas pesan 60g.

Supóñamos que os cubos pesan x gramos. Como 3 bólas no prato A corresponden a 8 cubos no prato B, e 1 cubo no prato A corresponde a 6 bólas no prato B, temos a seguinte relación: $\frac{30}{8x}=\frac{x}{60}$

Entón, despexando temos: $8x^2=1800 \Rightarrow x=15$

Así, sabemos que a verdadeira masa dun cubo de plástico é 15g.

2- Proposta de resolución:



Duplicamos a segunda pesada e así temos 12 bólas e 8 cubos, polo que cada 3 bólas equivalen a 2 cubos

Tres ○ = Dous □

Logo □ $=\frac{3\times 10}{2}=15$

Cada cubo pesa 15g

3.- A CORDA DA FEIRA

Un tratante de gando tiña 32 ovellas dispostas en oito currais de planta cadrada. En cada curral das esquinas hai unha ovella e en cada un dos centrais hai sete, de acordo coa seguinte disposición**:**

1	**7**	**1**
7		**7**
1	**7**	**1**

O tratante conta cada noite as ovellas que hai en cada fileira e asegúrase de que sexan nove. Unha vez feito isto, retírase a durmir.

A)Certo día róubanlle catro animais. Cando o tratante fai o seu reconto nocturno non se decata de nada, pois as ovellas seguen sumando nove por fileira. Que fixeron os ladróns para burlar ao tratante? Como situaron nos currais ás ovellas que deixaron?

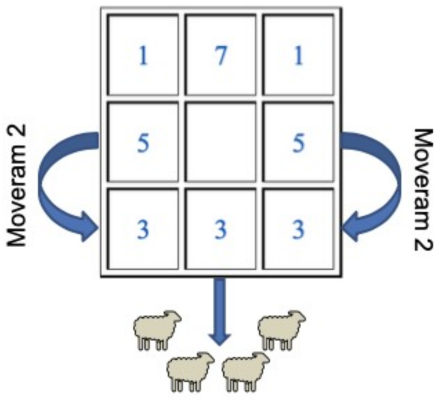
B) Tres días máis tarde róubanlle outras catro e tampouco o tratante se deu conta de nada ao contar. Como o volveron a burlar?

C)Unha semana despois, o tratante realizou o seu habitual reconto, saíronlle as contas, e volveu tranquilo a durmir. Pero, á mañá seguinte, unha inspección do veterinario descubriu que só quedaban 20 ovellas. Que fixeron os ladróns para burlar por terceira vez ao inxenuo tratante?

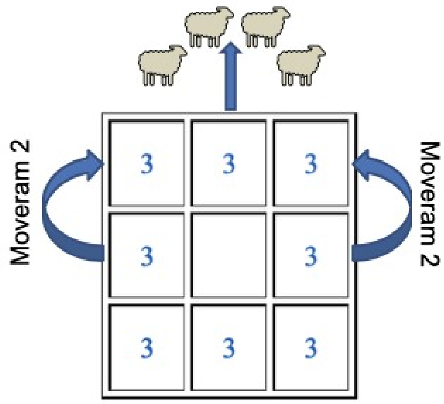
D) Sería posible un cuarto roubo?

1- Proposta de resolución:

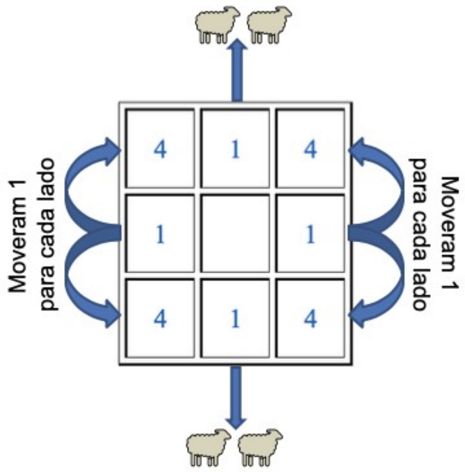
A)



B)



C)



D) Non é posible un cuarto roubo.

APM Associação de Professores de Matemática

AGAPEMA

2- Proposta de resolución:

A)Pasan unha ovella do centro de cada fila á esquina seguinte no sentido das agullas do reloxo:

2	6	2
6		6
2	6	2

Poden roubar, entón, unha ovella do centro de cada fila é dicir, catro ovellas en total, xa que cada fila seguirá sumando 9, quedando:

2	5	2
5		5
2	5	2

B)Repiten o proceso, e poden roubar de novo catro ovellas en total, xa que cada fila seguirá sumando 9, quedando:

3	4	3
4		4
3	4	3

3	3	3
3		3
3	3	3

C) Aínda poden roubar catro ovellas por terceira vez co mesmo procedemento:

4	2	4
2		2
4	2	4

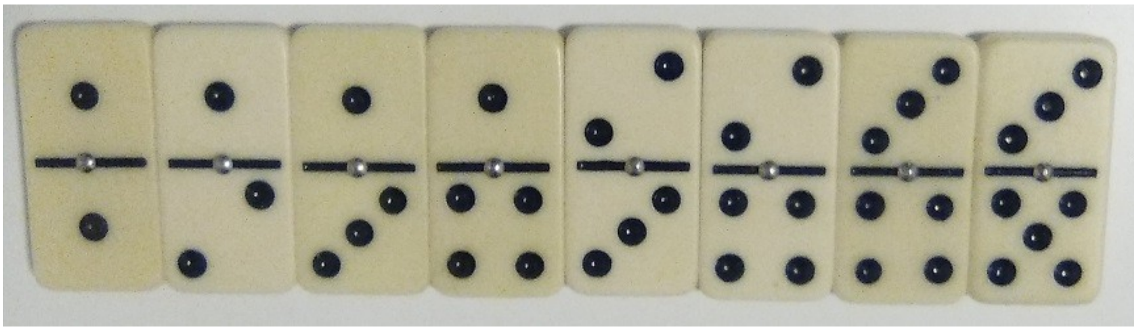
4	1	4
1		1
4	1	4

D)Evidentemente, non poden roubar máis, xa que non é posible quitar unha ovella de cada centro e deixar cada fila con 9 ovellas:

5		5
5		5

4.-UN CADRADO MÁXICO DE DOMINÓ

A) Coas oito pezas de dominó que están na imaxe inferior, debes formar un cadrado de 4x4 de tal maneira que o número de puntos de cada liña, columna ou diagonal sexa o mesmo.



B) No cadro Melancolía de Durero, aparecen varios elementos matemáticos, entre eles un cadrado máxico de orde 4x4.

Debedes emular a Durero e crear o voso cadrado máxico. Nunha cuadrícula de 4 x 4 debes colocar os números do 1 ao 16 sen repetir ningún, un en cada cadro, de maneira que a suma dos números que aparezan en cada fila, en cada columna e en cada diagonal debe ser o mesmo.

O primeiro que terás que saber é: canto valerá esa suma?

Os números colocados en cada un destes“Cuartos”tamén sumarán o mesmo que as filas, columnas e diagonais.

Proposta de resolución:

A)

As oito fichas que temos suman en total 40 (2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8), polo tanto cada fila, columna e diagonal debe sumar 10

As fichas (5, 3) e (3,4) como son as de maior valor non as poñeremos na mesma posición (horizontal ou vertical) pois aumentarían a suma. Optamos por colocar o (5,3) en vertical de tal maneira que o 5 aporte ás tres sumas (horizontal, vertical e diagonal)

3	4		
		5	
		3	

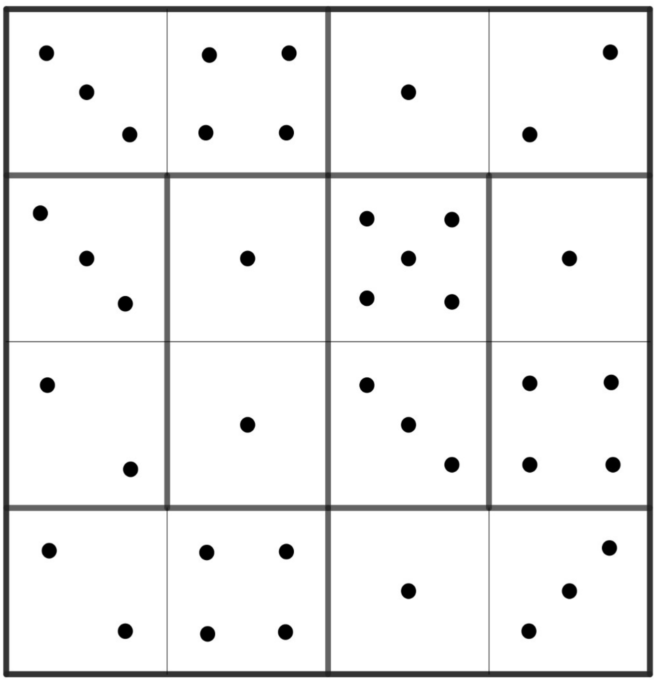
A ficha (1,1) non pode ir en horizontal pois non conseguiriamos sumar 10 co resto, e tampouco pode ir na 1ª vertical pois non teríamos posibilidade para esa suma.

Na horizontal da 1ª fila ten que ir unha ficha que sume 3 e teña un 1, entón (1,2) o que non nos permite que a (1,1) vaia na 4ª columna xa que non teríamos outra posibilidade de sumar 10.

3	4	1	2
	1	5	
	1	3	
2	4		

Na 2ª columna necesitamos un 4 e na 3ª un 1, entón a ficha (1,4) non pode ir en horizontal e nesa horizontal irá a outra ficha con 4: (2,4) .

Á vista da imaxe e tendo en conta que nas diagonais tamén debe sumar 10, a única ficha posible é a (1,3) quedando así a (1,4) e (3,2) que son válidas en calquera desas dúas posicións. Así:



B)

Para facer cadrados máxicos de orde par empregamos o seguinte método: Colocamos os números ordenados comezando nun dos vértices e elixindo a colocación en horizontal ou vertical. A continuación retiramos todos os que están fóra das dúas diagonais e ordenámolos de menor a maior. Colocamos estes valores da mesma maneira que colocamos os primeiros pero en orde inversa, é dicir empezando por onde acabamos.

No noso caso é de orde 4, colocamos os 16 números que suman en total 136 e polo tanto correspóndelle 34 a cada fila, columna ou diagonal en orde nun cadrado de 4 x4 empezando no vértice superior esquerdo:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Quedamos coas dúas diagonais e os números que están fora , ordenámolos de menor a maior e colocámolos nos ocos empezando por abaixo : 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 e 15

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

E vemos que calquera cadrado de 2 x 2 que escollamos dentro dese cadrado segue sumando 34 que é a nosa constante

5.- NO CASTELO DE VALENÇA

No castelo de Valença vivía un príncipe.

Os segredos do castelo íanselle revelando a medida que este ía medrando, pero o príncipe, que era moi curioso, abriu unha porta e caeu nunha trampa.

Na sala onde quedou preso había tres portas e unha inscrición en cada unha delas, ademais

UNHA E SÓ UNHA DAS INFORMACIÓNS DAS PORTAS É FALSA.

Cada unha das portas conducía a sitios diferentes.

O príncipe, por primeira vez na vida, tiña que tomar unha decisión e non podía fallar.

Que porta debe escoller o príncipe para acceder aos apousentos do pai?

Proposta de resolución:

Analizamos todas as posibilidades das verdades ou falsedades dos letreiros das portas:

Se a 1ª porta está ben rotulada, entón a 3ª porta tamén está ben rotulada, pero a segunda pode estar ben rotulada ou non

Se a 2ª porta está ben rotulada, entón a 1ª porta pode estar rotulada ou non o que xa implicaría directamente á 3ª

- Se a 1ª está ben rotulada a 3ª tamén está ben rotulada
- Se a 1ª non está ben rotulada a 3ª tampouco estaría ben rotulada

Se a 3ª porta está ben rotulada, entón a 1ª pode estar ben rotulada ou non e xa implicaría á 2ª

- Se a 1ª está ben rotulada a 2ª tamén está ben rotulada
- Se a 1ª non está ben rotulada a 2ª tampouco estaría ben rotulada

Se toda esta información a pasamos a unha táboa e temos en conta que só unha pode estar mal rotulada, teríamos:

				
1ª porta ben rotulada	V	V	V	NON VÁLIDO
	V	F	V	VÁLIDO
2ª porta ben rotulada	V	V	V	NON VÁLIDO
	F	V	F	NON VÁLIDO
3ª porta ben rotulada	V	V	V	NON VÁLIDO
	F	F	V	NON VÁLIDO

Por tanto, sabemos que a que nos dí a verdade é a 1ª porta , pero os apousentos non poden estar na 2ª porta, estarán na 3ª

<u>O principe debe entrar pola terceira porta</u>