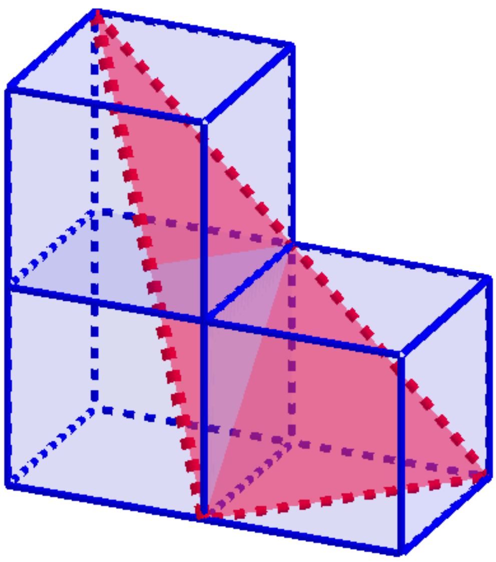
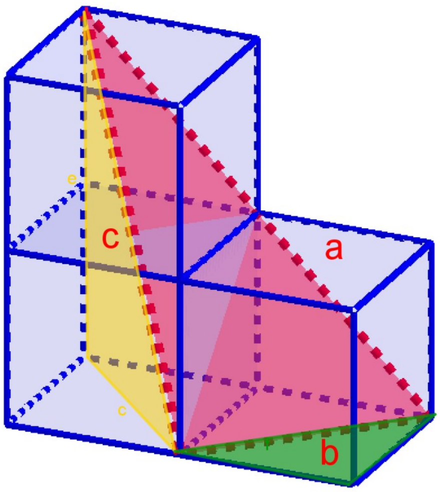
MATEMÁTICAS NA RAIA – 2018

1.- TRIÁNGULO ATRAPADO

Tres cubos de aresta 1 cm, atraparon un triángulo, como podedes ver na imaxe. Necesitamos saber cal é a área do triángulo, podédesnos axudar?



Proposta de resolución



Denotamos por c, b e a os lados do triángulo e calculamos o seu valor

O lado b é a diagonal do triángulo verde que está na base do cubo da dereita, e como este cubo sabemos que ten aresta 1. Polo tanto usando Pitágoras:

$$b=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

O lado c é a diagonal do triángulo amarelo que resulta da unión dos dous cubos da esquerda, este triángulo ten como catetos a diagonal da base do cubo que é mesmo que o lado b, e o outro cateto e a aresta da unión dos dous cubos, polo tanto vale 2.

$$c=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$$

O lado a como os dous verices do triángulo estan en caras que ocupan a mesma posición, entón é a suma das diagonais de cada cara, polo tanto:

$$a=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$$

Comprobamos se este triángulo é rectangulo, pois em tal caso un cateto xa sería a base e o outro a altura, isto é así se $a^2 = b^2 + c^2$

$(2\cdot\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2$ entón $4\cdot 2=2+6$ que efectivamente se verifica

Por tanto $A_{\text{triángulo}} = \dfrac{base\cdot altura}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{\dfrac{12}{4}}=\sqrt{3}$

2.-A VIAXE A OPORTO

Nunha viaxe a Oporto, Cristina fixo as seguintes observacións relativas aos hoteis nos que se hospedou:

- Sempre que a comida era boa, os empregados eran agradables;
- Todos os hoteis abertos durante todo o ano tiñan vistas para o río Douro;
- A comida só era mala nalgúns hoteis baratos;
- Os hoteis con piscina tiñan os muros cubertos de madreselvas;
- Os hoteis cuxos empregados eran desagradables eran os que estaban abertos só durante unha parte do ano;
- Ningún hotel barato admitía a presenza de cans;
- Os hoteis sen piscina non tiñan vistas para o río Douro.

Desde os hoteis que admiten cans, poderán os propietarios ver os muros con madreselvas?. Xustificade a vosa resposta.

Proposta de solución:

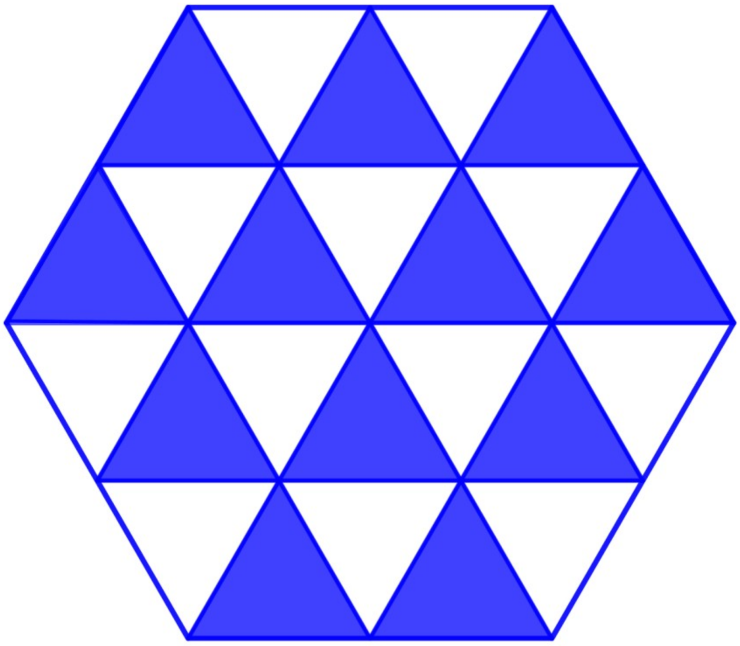
Queremos saber se haberá hoteis que admitan cans e que teñan muros con madreselvas. Cristina quere ir para un hotel con esas condicións.

- Polo punto 6, ningún hotel barato admite a presenza de cans, polo que non pode ir para un hotel barato.
- Como a comida só era mala nalgúns hoteis baratos (punto 3), entón vai para un hotel con comida boa.
- Se a comida é boa, os empregados son agradables (punto 1). Os hoteis cuxos empregados eran desagradables, só estaban abertos durante unha parte do ano (punto 5). Polo tanto, os hoteis que están abertos todo o ano son os que teñen empregados agradables, e estes hoteis son os que teñen vistas ao río Douro (punto 2).
- No último punto, os hoteis sen piscina non teñen vistas ao río. En resumo, sabemos que: vai para hoteis con vista para o río, son hoteis con piscina e estes son os que teñen muros cubertos de madreselvas (punto 4).

Conclusión: <u>Os propietarios de cans poden ver os muros con madreselvas</u>

3.- TRIANGULITE

Un hexágono regular de 2cm de lado pódese descompoñer en triángulos equiláteros de 1cm de lado, como se indica no debuxo.



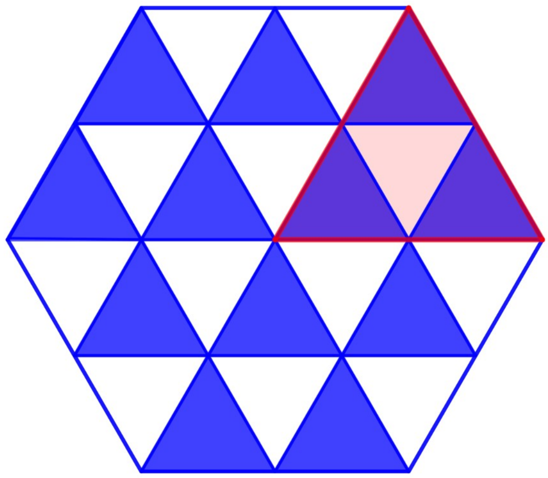
a) Cantos triángulos coma os anteriores habería nun hexágono de 3 cm de lado?

b) Canto mide o lado do menor hexágono que contén 150 triángulos equiláteros de 1cm de lado?

c) Canto mide o lado do menor hexágono que contén 2018 triángulos equiláteros de 1cm de lado?

d) Poderiades atopar unha expresión xeral que nos dea o número de triángulos en función da medida do lado do hexágono?

Proposta de resolución

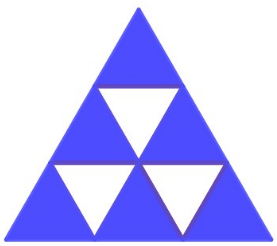


Sabemos que un hexágono está dividido en 6 tiángulos con un vértice no centro e de lado o lado do hexágono.

Se facemos un proceso deductivo empezando polo caso mais sinxelo, temos

Se o hexágono ten lado 1, temos 6 triángulos.

Se o lado é 2, vemos que se aumentan 3 triángulos en cada lado, entón temos 1+3 =4 e multiplicado por 6 sería 24



Se temos lado 3:

Vemos que cada vez que aumentamos 1 cm ao lado aumentan 2 triángulo mais que a fila anterior, ou sexa teríamos 5 que xunto cos anteriores temos: 1 +3 + 5 =9

E multiplicando por 6, entón o hexágono de lado 3 terá $6 \cdot 9 = 54$

Se nos fixamos nestes resultados, en que cada fila que aumentamos nunha das sextas partes do hexágono aumentamos o seguinte número impar , e a suma dos números impares ordenados é un cadrado perfecto :

$1=1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

Entón Nº triangulos dun hexágono de lado n é : $N_{\text{triángulos}} = 6 \cdot n^2$ e así xa temos contestado o apartado d

b) O número de triángulos de cada sexta parte sabemos que é n^2, sendo n a dimension do lado

O hexágono que contén 150 triángulos, entón en cada sexta parte ten 25

E como $25 = 5^2$, entón o noso hexágono ten 5 cm de lado

c) Co mesmo proceso do apartado anterior , 2018 : 6 = 336,3

Buscamos a súa raiz $\sqrt{(336{,}3)} = 18{,}33$

Por tanto ten que ser un hexágono de 19 cm de lado, pois o de 18 ten mesos deses 2018

d) Xa estaba contestado en a : $N_{\text{triángulos}} = 6 \cdot n^2$

4.-AS MATRÍCULAS DOS AUTOMÓBILES

Adriano interesábase polos números das matrículas dos automóbiles do seu país, máis concretamente por todos aqueles compostos por catro cifras impares todas diferentes, por exemplo, 3175. Adriano calculou a cantidade de tales números. En efecto, como existen cinco cifras impares 9, 7, 5, 3, e 1, existen cinco formas diferentes de escoller a cifra da dereita, catro formas de escoller a seguinte para que sexa diferente da anterior, tres para escoller a terceira e dúas para escoller a cuarta.

Total: 5 x 4 x 3 x 2 = 120.

Con todo, Adriano non chegou a calcular a suma destes 120 números. Non obstante, é posible facer este cálculo directamente. Como? Xustificade a vosa resposta.

Proposta de resolución

Para cada posibilidade de cifra das unidades, teremos 24 números posibles. Así, dámonos conta que a suma das unidades de cada un dos números virá dada por:

$$1\times24+3\times24+5\times24+7\times24+9\times24=600$$

Para cada posibilidade de cifra das decenas, teremos novamente 24 números posibles. Entón, sumando:

$$10\times24+30\times24+50\times24+70\times24+90\times24=6000$$

Do mesmo modo, para cada hipótese da cifra das centenas, temos 24 números posibles:

$$100\times24+300\times24+500\times24+700\times24+900\times24=60000$$

Por fin, para cada hipótese da cifra dos miles, temos 24 números posibles:

$$1000\times24+3000\times24+5000\times24+7000\times24+9000\times24=600000$$

Facendo a suma dos números obtidos, vemos que a suma dos 120 números é: **666600.**

Solución aportada por un grupo participante:

O menor número que podemos formar coas cifras impares é 1357, e o maior, 9753, que, sumados, dan 11110. A media dos dous números é 5555.

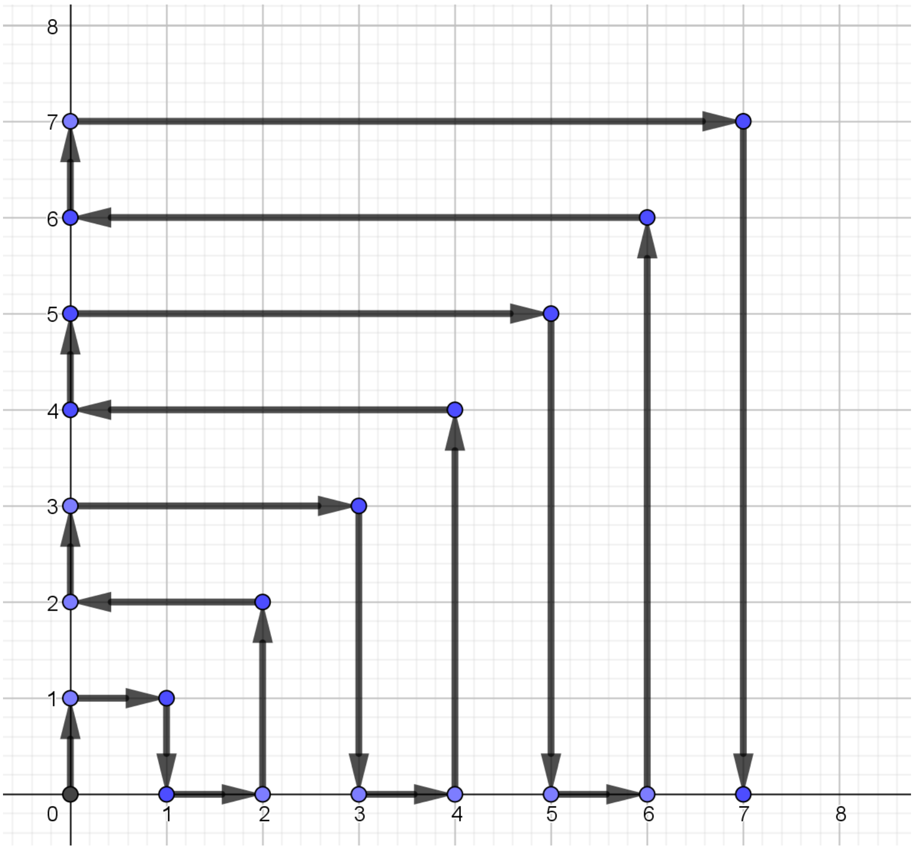
Isto multiplicado por 120 posibles números é: **666600**.

5.- O ROBOT

Un robot circula por un plano coordenado da forma que marca o debuxo.

Así, despois de chegar ao punto (7,0), avanzará unha unidade en horizontal ata o punto (8,0), logo subirá en vertical 8 unidades ata o punto (8,8) e retrocederá en horizontal oito unidades ata o punto (0,8), e así sucesivamente.

Se cada unidade do plano mide 1 centímetro, en que coordenadas se atopará cando leve percorridos exactamente 2018 centímetros?

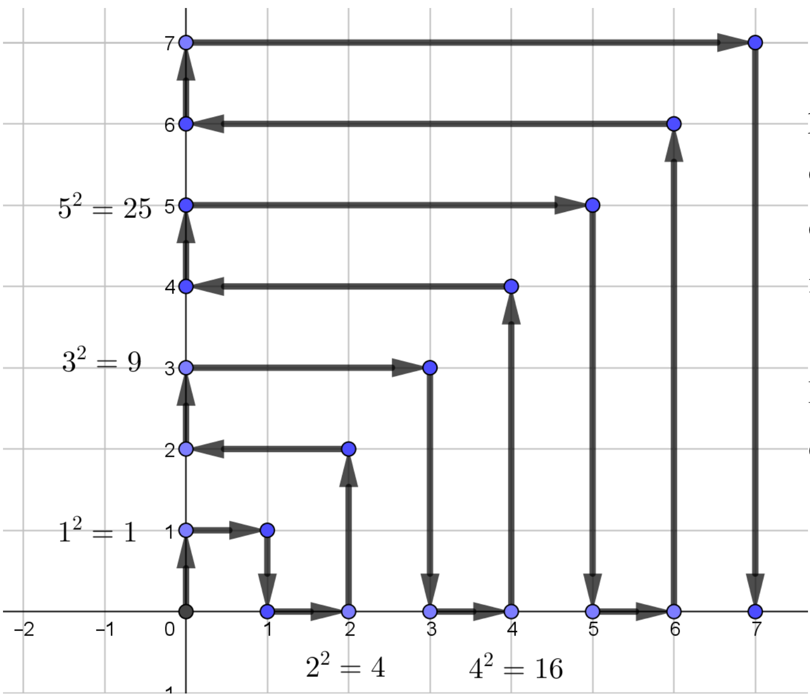


1- Proposta de solución:

Conseguimos definir unha sucesión u_n que nos da a lonxitude do camiño que o robot percorre ata chegar ao punto $(0,2n)$. Por exemplo, ata chegar ao punto $(0,2)$ percorre 8 cm, ata ao punto $(0,4)$ percorre 24 cm, ata ao ponto $(0,6)$ percorre 48 cm, ata o punto $(0,8)$ percorre 80 cm, e así sucesivamente, ata que no punto $(0,2n)$ percorreu $4n+4n^2$, isto é, $v_n=4n+4n^2$.

Sabemos que $v_{22}=2024$. Como v_{22} é calculado cando estamos no punto $(0,44)$ e $2024-2018=6$, significa que temos que separarnos 6 cm e, neste caso, iso quere dicir que mantemos o valor da ordenada e aumentamos 6 unidades na abscisa. Logo, o robot estará no punto (6,44).

2- Proposta de solución:



Se nos fixamos na imaxe, no eixe X, o percorrido do robot coincide co cadrado dos números pares aos que chega, e no eixe Y, cos cadrados dos impares.

Buscamos entón entre que cadrados está 2018:

$$44^2=1936<2018<2025=45^2$$

Como 2025 - 2018= 7 e 1 cm necesítao para baixar, entón ten que moverse cara atrás 6 en horizontal. O robot estará no punto (6,44).