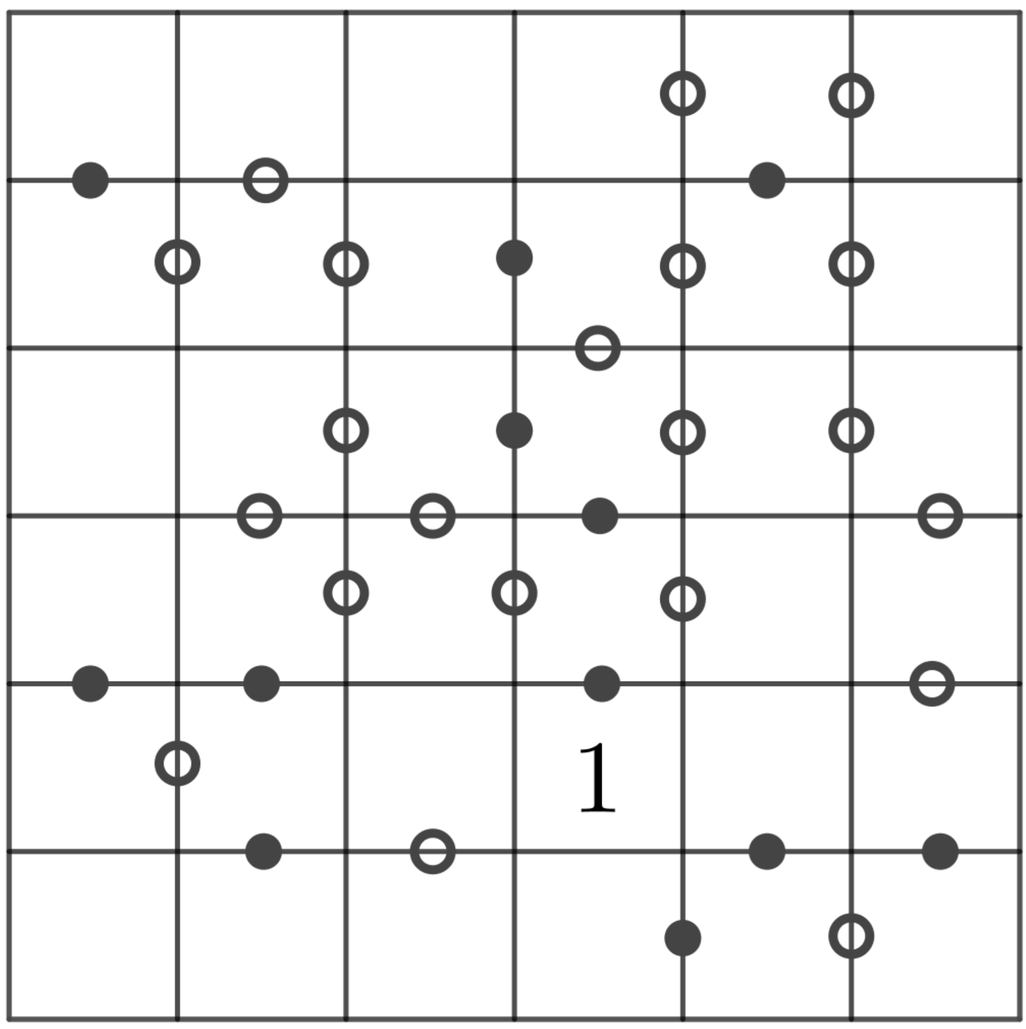
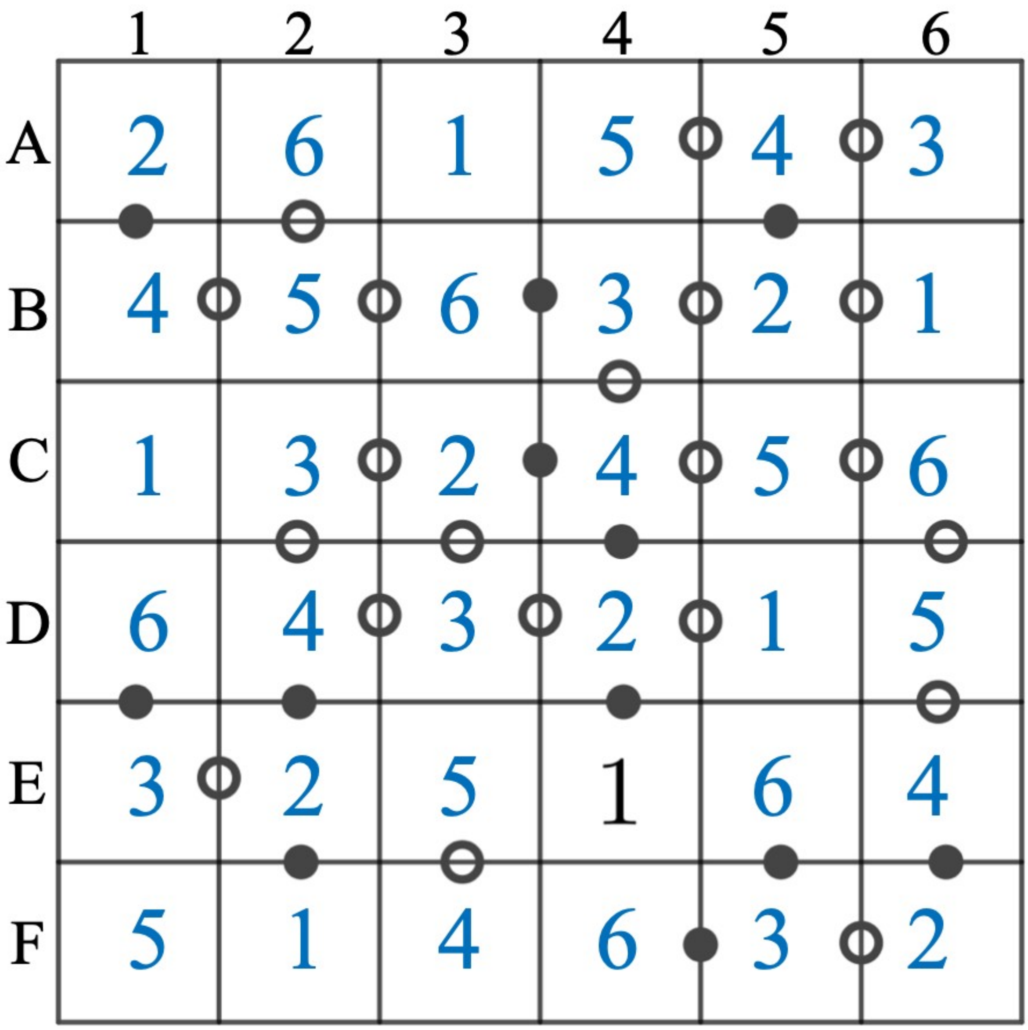
2019

1.- SUDOKU ESPECIAL

Na casa do meu amigo Gauss propuxéronnos unha nova variedade do xogo do sudoku. Trátase de colocar os números do 1 ao 6 dispostos en filas e columnas sen que se repitan, de xeito que dúas casillas que compartan punto negro sexan dobre un do outro e se comparten un punto branco sexan números consecutivos. Poderiades completar este sudoku tan especial?



Posible solución



- Poñemos na posición D4 o número 2, xa que ten que ser o dobre de 1.
- Cubrimos C4, que só pode ser 4 ou 1, como o 1 xa está, entón ten que ser 4.
- Pasamos a C3, que debe ser o dobre ou a metade de 4, entón forzosamente é 2.
- Na posición D3 van 1 ou 3 (consecutivos de 2). O 1 non pode ser, pois, en D2 habería que poñer 2 (consecutivo de 1), pero este xa está, entón é o 3.
- Cubrimos D2 co número 4, xa que debe ser consecutivo de 3, e o 2 xa está colocado.
- En E2 debemos ter dobre ou metade do 4, polo que só podemos poñer o 2.
- En E3 a única posibilidade é 3, pois 1 xa está colocado.
- En C2 só podemos colocar o 3, o único consecutivo de 2 e 4. Entón en C5 debe ir o 5 e en C6 o 6 , pois é consecutivo de 5, e así para C1 queda o 1.
- En D6 a única posibilidade é 5 como consecutivos. En D1 e D5 deben ir 1 e 6 e como na columna 1 xa está o 1, en D1 vai o 6 e en D5 irá o 1

- En E1 so pode ir o 3, por ser a metade de 6 e en E6 vai o 4 por consecutivo de 5. E como consecuencia en F6 so pode ir o 2.
- En F5 só pode ir 3, pois o 1 xa está nesa columna, entón en E5 vai o 6 como dobre de 3, polo tanto na liña E só queda o 5 para a posición E3.
- En F4 a única posibilidade é 6, dobre de 3, e por tanto en F3 só pode ir o 4 como consecutivo de 5, pois o 6 xa está colocado. Esto fai que en F1 teña que ir o 5 , pois o 1 xa está nesa columna e entón en F2 vai o 1 como metade de 2.
- Na columna 2 só necesitamos utilizar os números 5 e 6. Na B2 só podemos poñer o número 5, xa que ten que ser un número con dúas posibilidades de números consecutivos, as B1 e B3, posicións na mesma liña, deben ser consecutivas a B2. Así, en B2 teremos o o número 5 e en A2 o número 6.
- En B1, temos que poñer 4, pois é consecutivo de 5 e ten que ser o dobre de A1, que por tanto será o 2. En B3 debe ir o 6 consecutivo de 5 o que fai que en B4 vaia o 3 como metade de 6. Así en B5 ten que ir o 2 e en B6 o 1 como consecutivos.
- Desta maneira xa só nos queda a fila A que pode ser cuberta por eliminación. En A3 un 1, en A4 un 5, así en A5 un 4 e en A6 un 3.

Isto déixanos co noso sudoku especial completo!

2.- CALCETÍNS E LUVAS

Miguel garda os calcetíns e as luvas nun caixón do seu armario. Ten seis pares de calcetíns azuis, cinco pares de calcetíns negros, catro pares de luvas negras e tres pares de luvas grises. Desafortunadamente o caixón está bastante desordenado e as pezas están todas mesturadas. Unha mañá de inverno, estaba aínda escuro e faltou a luz. Miguel necesitaba un par de calcetíns e outro de luvas pero, debido ao frío, tiña as mans conxeladas e non conseguía distinguir unha media dunha luva. Cal é o menor número de pezas que ten que sacar do caixón para estar seguro de ter un par de calcetíns iguais e outro de luvas da mesma cor?.

Xustificade o resultado.

Solución

Comecemos por recoller os dados do problema:

6 pares de calcetíns azuis e 5 pares negros, entón 22 calcetíns e 4 pares de luvas negras e 3 pares de grises, polo tanto 14 luvas. En total 36 pezas

Na escuridade e no frío, non era posible distinguir entre luvas e calcetíns, nin as súas respectivas cores.

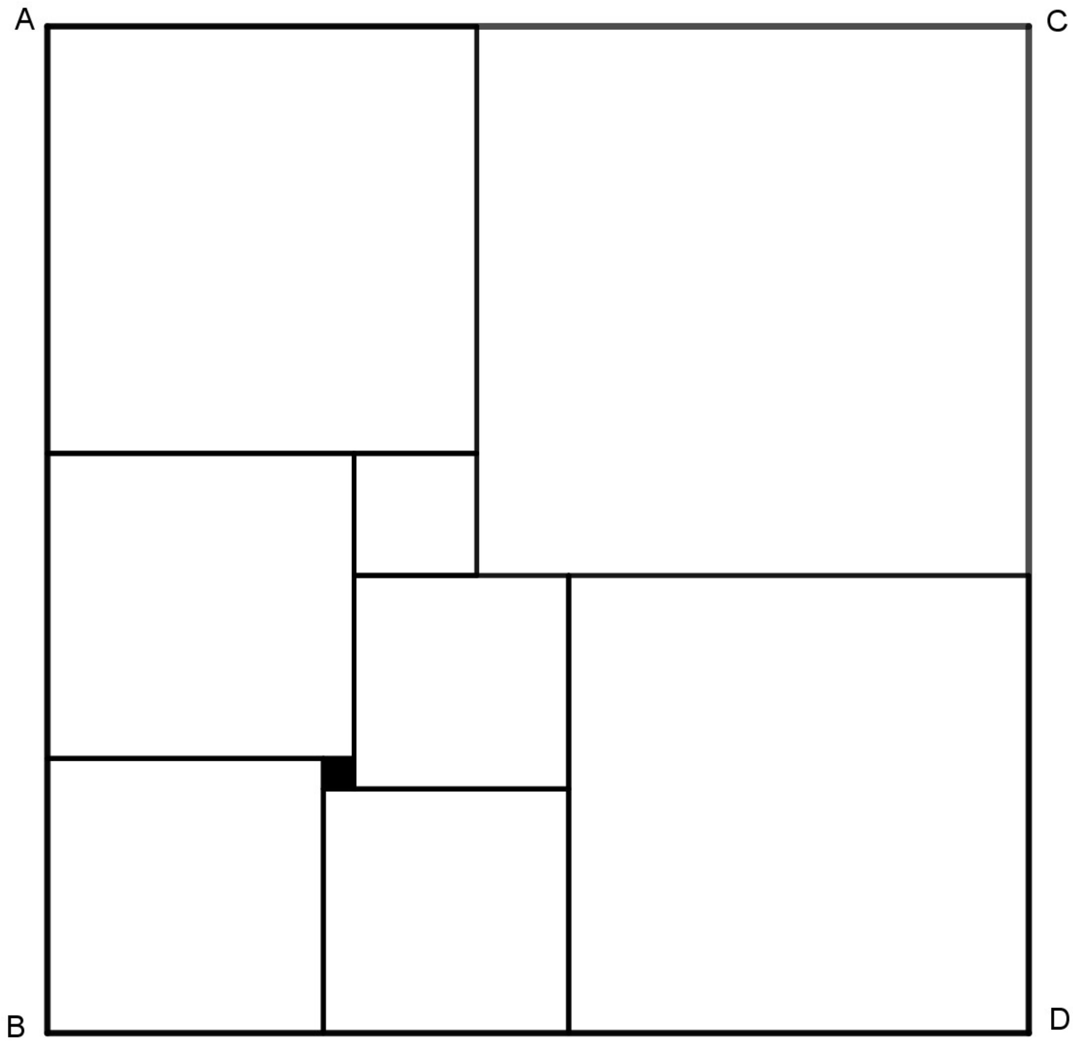
Como temos 14 luvas en total, se Miguel quitase só 14 pezas correría o risco de que non quite ningún calcetín. Polo tanto, ten que quitar máis de 14 pezas. Polo mesmo razoamento, Miguel debe quitar máis de 22 pezas, porque se só quita 22 pezas corre o risco de quitar só os calcetíns.

Agora supoñendo o peor dos casos, é dicir, que Miguel saca os 22 calcetíns do caixón e ningunha luva, xa te aseguraches de ter un par de calcetíns da mesma cor, e só falta o par de luvas.

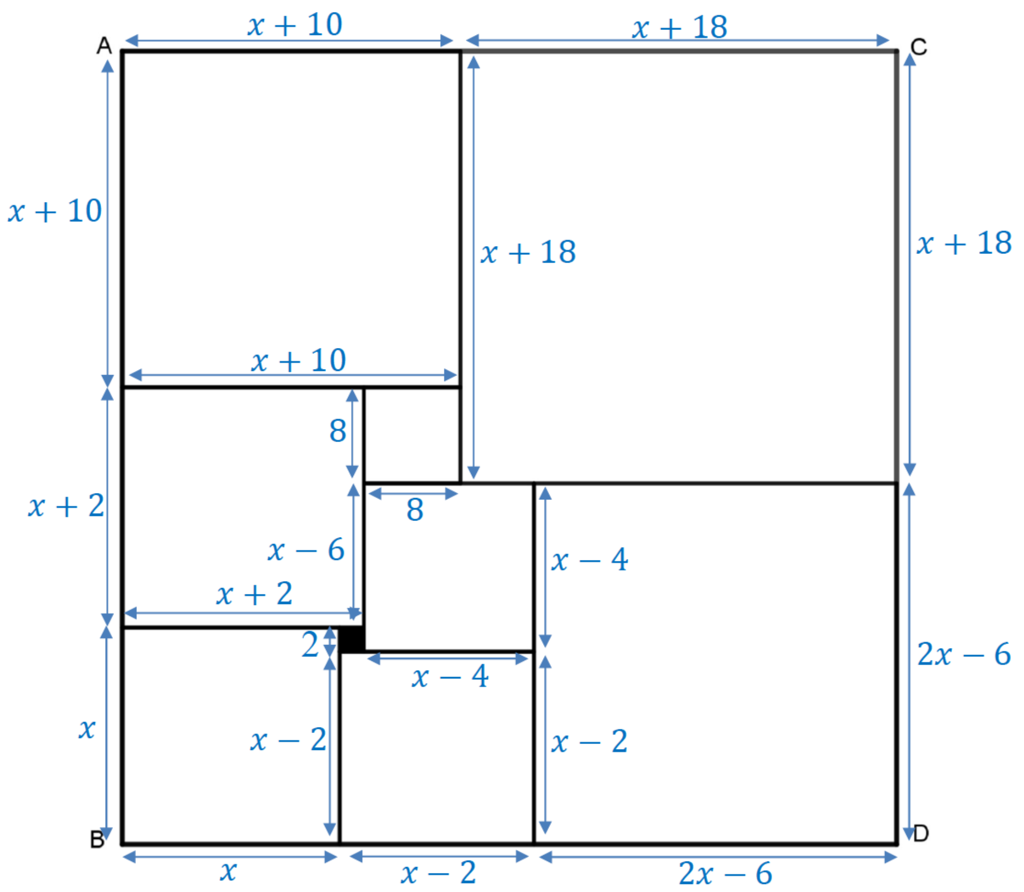
Entón, Miguel ten que quitar dúas pezas máis, para ter un par de luvas, o que significa que saca 24 pezas do caixón. Non obstante, estas dúas luvas poden ser da mesma cor, o que soluciona o problema, pero tamén poden ser de diferentes cores: unha negra e outra gris. Sacando do caixón unha terceira luva, esta será negra ou gris, polo que se combinará cunha das que está fora. Polo tanto, Miguel debe retirar 25 pezas do caixón, para garantir ter un par de calcetíns a xogo e un par de luvas da mesma cor.

3.- CADRADO ATRAPADO

Este rectángulo ABCD foi cortado en cadrados. Calcula as súas dimensións (lonxitude e anchura), tendo en conta que o cadrado "pequeniño" negro da figura representa un cadrado de 2 cm de lado.



Proposta de solución:
Para resolver este problema, podemos comezar por definir x sendo a medida dun lado de un dos cadrados. A partir deste, calculamos as expresións dos restantes cadrados.



Sabendo as expresións representadas na figura, vemos que:

$$(x+10)+(x+18)=x+(x-2)+(2x-6)$$

$$2x+28=4x-8 \Leftrightarrow 4x-2x=28+8 \Leftrightarrow 2x=36 \Leftrightarrow x=18$$

Así temos que:

$$\overline{AB}=(x+10)+(x+2)+x=66$$
$$\overline{BD}=x+(x-2)+(2x-6)=64$$

Por tanto, o rectángulo $[ABCD]$ **ten** $66\,cm$ **de alto e** $64\,cm$ **de largo.**

Solución aportada por un grupo participante:

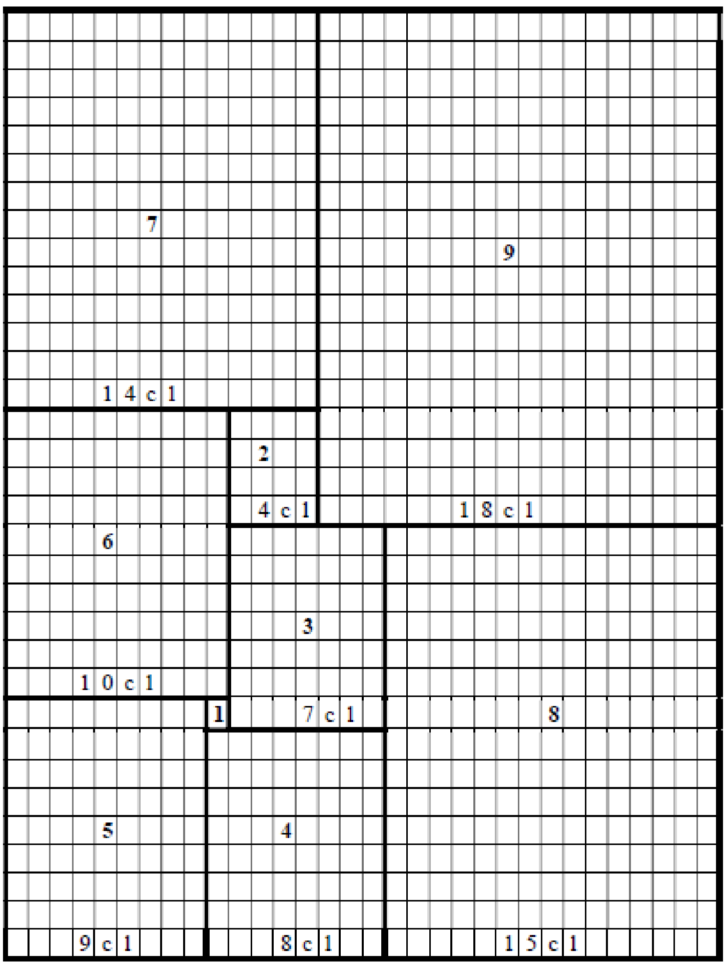
Basamonos no cadrado pequeno como unidade:

2º cadrado: ten un valor de 4 unidades ou 4 cadrados pequenos
2º cadrado: ten un valor de 4 unidades ou 4 cadrados pequenos
4º cadrado: ten os catro do 2º cadrado máis tres de lado e o un inicial
3º cadrado: ten os oito do 4º menos un que é a unidade
5º cadrado: ten os oito do 4º máisun que é a unidade
6º cadrado: ten os nove do 5º máis a unidade
7º cadrado: ten os dez do 6º máis catro do 2º
8º cadrado: ten os sete do 3º máis os oito do 4º
9º cadrado: ten os quince do 8º máis tres
Como o cadrado unidade ten 2 cm de lado:

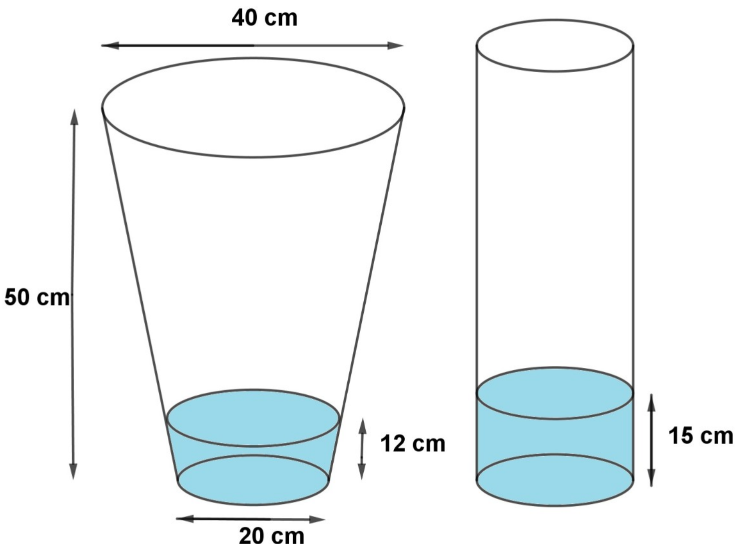
32 cadrados x 2 cms = 64 cms BD ancho

33 “ x 2 cms = 66 cms AB largo

Área = 64 x 66 = 4224 cm^2



4.- ENCHENDO VASOS

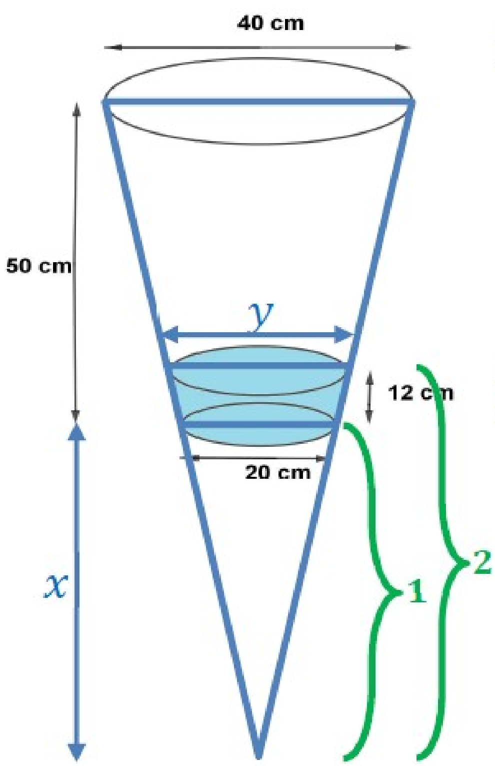


En 12 segundos enchemos estes recipientes ata unha altura de 15 e 12 cm. Calcular ata que altura se encherá cada un nun minuto.

Proposta de solución

No caso do cilindro, a a altura do líquido será diretamente proporcional ao tempo. Por tanto, temos: $\frac{15}{12}=\frac{x}{60}$ por equivalencia: x= 75 cm

Pasemos agora ao recipiente con forma de tronco de cono.



Calcularemos x e y do debuxo, esenciais para saber a cantidade de líquido do recipiente.

Por semellanza de triángulos:

$$\frac{x}{50+x}=\frac{20}{40} \quad \Leftrightarrow \quad x = 50$$

$$\frac{50}{62}=\frac{20}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = 24{,}8$$

Agora xa é posible calcular o volume de líquido que está no recipiente: $V_{líq}= V_2 - V_1$

$$V_2= \frac{1}{3}.12{,}4^2.\pi.62=\frac{9533{,}12.\pi}{3}$$

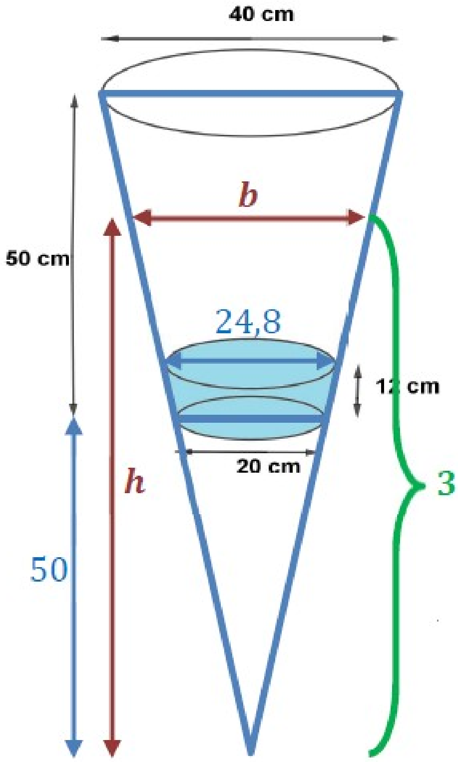
$$V_1= \frac{1}{3}.10^2.\pi.50=\frac{5000.\pi}{3}$$

Entón $V_{líq=} \frac{4533{,}12.\pi}{3}$ cm^3

A quantidade de líquido será diretamente proporcional ao tempo, asumindo que o recipiente enche sempre à mesma velocidade. Por tanto, conseguimos calcular o volume de líquido que estará no recipiente pasados 60 segundos:

$\dfrac{\frac{4533{,}12.\pi}{3}}{12}=\dfrac{z}{60}$ Por tanto $z=7555{,}2\ \pi\ cm^3$

A partir deste volume, conseguimos chegar ao valor da altura do líquido, sabendo que o valor de z é o mesmo que a diferenza entre o volume do cono 3 e o volume do cono 1



$z= V_3 - V_1$

$V_3= \frac{1}{3}.(\frac{b}{2})^2.\pi.h$

$V_1= \frac{1}{3}.10^2.\pi.50=\frac{5000.\pi}{3}$

Así : $7555{,}2\ \pi = \frac{1}{3}.(\frac{b}{2})^2.\pi.h-\frac{5000\,\pi}{3}$

$7555{,}2\ \pi = \frac{b^2.h.\pi-20000\,\pi}{12}$

Por tanto : $90662{,}4 = b^2 h - 20000$

$110662{,}4 = b^2 h$

Como temos ainda dúas incógnitas, relacionámolas empregando a semellanza de triángulos:

$\frac{b}{20}=\frac{h}{50}\rightarrow b=\frac{20h}{50}\rightarrow b=\frac{2h}{5}$ Volvendo a nosa expresión $110662{,}4 = b^2 h$ e substituíndo:

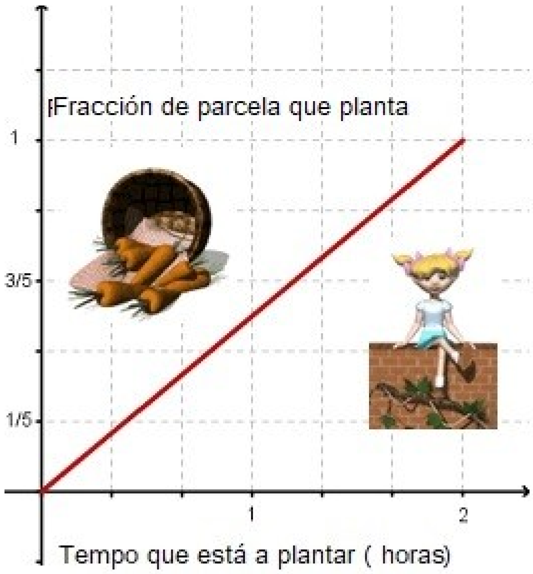
$110662{,}4 = (\frac{2h}{5})^2.h$, entón $691640= h^3$ e despexando $h\approx 88{,}4$

Agora a estes 88,4 cm, restamos os 50 cm da altura do cono mais pequeno, que nos axudou nos cálculos dos volumes dos conos, pero que non forma parte do recipiente.

Finalmente, nun minuto, o primeiro recipiente encherá ata os 38,4 cm de altura e o segundo recipiente encherá ata aos 75 cm.

5.- UNHA TOUPA MOI COMEDORA

Branca é unha xardineira moi experimentada. Ten toda a súa horta preparada para plantala de cenorias. Con todo, na horta vive unha toupa que é capaz de comer todo o plantado.



Esta mañá, Branca empezou a plantar cenorias ás 9 da mañá, pero, ao mesmo tempo, a toupa empezou a "facer das súas". Á vista das gráficas: A que hora conseguirá Branca ter toda a horta plantada?. **Razoade a resposta.**

Proposta de solución

Este problema pode ser resolto se sabemos as ecuacións das rectas representadas nos dous gráficos. Chamemos f à función que indica a parte da horta que Branca pranta ao longo do tempo e g à que indica a parte da horta que a toupeira come.

Ambas son funcións lineais que pasan por (0,0), e como f pasa polo punto (2,1) e g polo ponto (3,1).

Así, temos que: $f(t) = \frac{1}{2}t$ e $g(t) = \frac{1}{3}t$

Para saber canto tempo tarda Branca en plantar a totalidade a horta, temos de facer a diferenza entre o que planta Branca e o que a toupa come, no mesmo tempo.

Vamos saber o tempo que Branca tarda, igualando esa diferenza a 1, que representa a unidade, isto é, toda a horta.

$f(t) - g(t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t = \frac{1}{6}t = 1$ Así t=6

Por tanto, Branca tarda 6 horas en plantar toda a horta. Como empezou a plantar as 9$\hbar$, significa que conseguirá ter toda a horta plantada as 15$\hbar$.

Outra resolución

Se facemos a redución à unidade:

Branca plantaría toda a horta en 2h, polo tanto nunha hora tería plantada 1/2 de horta

A toupa come toda a horta en 3h, polo tanto nunha hora comerá 1/3 de horta

Así facendo a resta: 1/2-1/3= 1/6 será o que consegue adiantarlle Branca a toupa.

Polo tanto tanto terá toda a horta plantada en 6 horas , entón : 9h+6h=**15h será a hora que remate**