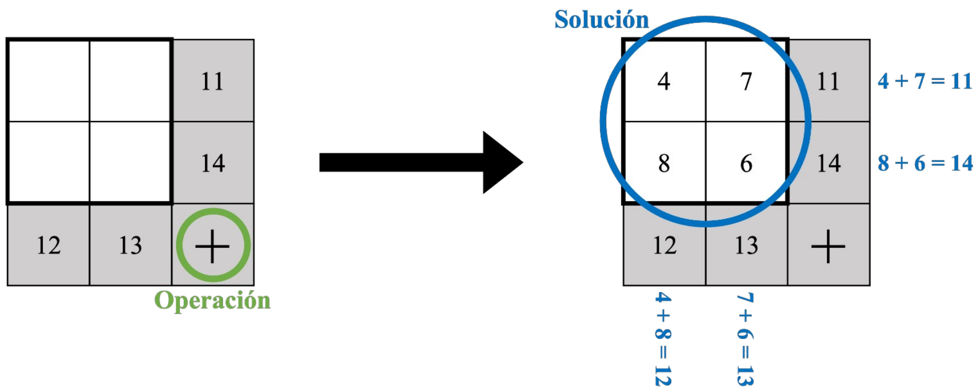
1.- YOHAKU

Yohaku é un novo tipo de quebracabezas de números que pon a proba o voso sentido numérico e as vosas habilidades para resolver problemas. Cada yohaku é un quebracabezas aditivo ou multiplicativo (como se indica polo símbolo na parte inferior dereita da cuadrícula). O obxectivo é encher as celas baleiras de maneira que dean a suma ou produto que se mostra en cada fila e columna. No seguinte exemplo vese un yohaku aditivo (ver o + na cela inferior dereita) e a súa solución.

Exemplo:



Debedes facer o mesmo co seguinte taboleiro.

				189
				79
				50
				42
66	82	201	11	+

Usar 16 divisores diferentes de 120

Proposta de resolución

Os divisores de 120 son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120
Teremos que usar todos os divisores de 120 para cubrir o yohaku aditivo. Para facilitar esta resolución, imos denominar as columnas por A, B, C e D, e as liñas por 1, 2, 3 e 4.

O número 120 só poderá estar na celda C1, xa que os únicos números superiores a 120 son o 201 e o 189. Na columna D teñen que ir os números 1, 2, 3 e 5, pois é a única maneira de suma ser 11.

	A	B	C	D	
1			120		189
2			60		79
3					50
4					42
	66	82	201	11	+

Quedan {4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60}

Na columna C, a única hipótese posible para a suma 201 é : 6+15+60+120.

Así mesmo, o número 60 só poderá estar en C2, pois as sumas das liñas 3 e 4 son inferiores a 60. Así: C2: {60} C3 e C4: {6, 15}

Quedan : {4, 8, 10, 12, 20, 24, 30, 40}

Na 1ª liña xa temos 120, polo que faltan tres números que sumen 69, e como na columna D só poden estar 1, 2, 3 ou 5. É imposible que D1 sexa 1, 2 ou 3, xa que iso significa que A1+ B1 sería 68, 67 e 66 respectivamente. Isto non é posible, pois non conseguimos sumar dous números do conxunto {4, 8, 10, 12, 20, 24, 30, 40} de forma a que resulten eses valores, entón D1=5 e, neste caso, A1+B1=64, polo que na liña 1 teremos os números 24 e 40. D1: {5}; A1 e B1: {24, 40}

Quedan: {4, 8, 10, 12, 20, 30}

Na liña 2, fáltannos por cubrir tres celdas, que sumadas darán 19, e como D2 é 1, 2 ou 3. D2 non poderá ser 2 pois 19 - 2=17, e iso só será posible sumando un número par e un impar. Como só temos números pares non pode ser que A2+B2=17. Entón, o número 2 estará en D3 ou en D4.

Caso 1: D3=2

	A	B	C	D	
1			120	5	189
2			60		79
3				2	50
4					42
	66	82	201	11	+

Neste caso, C3 non poderá ser 15. Isto porque se C3 fose 15, entón A3+B3=33, o que é imposible pois só temos pares para sumar. Entón, nesta situación, C3=6 e C4=15.

	A	B	C	D	
1			120	5	189
2			60		79
3			6	2	50
4			15		42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1			120	5	189
2			60	1	79
3			6	2	50
4			15	3	42
	66	82	201	11	+

Así, A3+B3=42, ou sexa: A3 e B3: {12, 30}

De momento, temos que: A1 e B1: {24, 40}; A3 e B3: {12, 30} e D2 e D4: {1, 3}

Celdas que faltan: {4, 8, 10, 20}

Na liña 4, temos dúas opcións: D4 é 1 ou 3. O que significa, que A4+B4 será 26 ou 24 respectivamente. Como os valores que nos faltan non permiten sumar 26, entón significa que A4+B4=24 e, por tanto, D4=3 e así: A4 e B4: {4, 20} e A2 e B2: {8, 10}

	A	B	C	D	
1	40	24	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	30	6	2	50
4	4	20	15	3	42
	66	82	201	11	+

Temos entón as seguintes hipóteses: A1 e B1: {24, 40} ; A2 e B2: {8, 10} ; A3 e B3: {12, 30} e A4 e B4: {4, 20}

Se A1=40, entón A2+A3+A4=26, e así A3=12. Por tanto, A2+A4=14, entón A2=10 e A4=4.

Así mesmo, B1=24, B2=8, B3=30 e B4=20.

Pero se B1=40, temos dúas hipóteses:

- Se B2=10, entón B3=12 e B4=20. Así A1=24, A2=8, A3=30 e A4=4
- Se B2=8, entón B3=30 e B4=4. Así A1=24, A2=10, A3=12 e A4=20

	A	B	C	D	
1	24	40	120	5	189
2	8	10	60	1	79
3	30	12	6	2	50
4	4	20	15	3	42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1	24	40	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	30	6	2	50
4	20	4	15	3	42
	66	82	201	11	+

Caso 2: D4=2

Neste caso, C4 non poderá ser 15, pois entón A4+B4=25, o que é imposible xa que só nos sobran números pares para sumar. Entón, nesta situación, C3=15 e C4=6.

	A	B	C	D	
1			120	5	189
2			60		79
3			15		50
4			6	2	42
	66	82	201	11	+

Así, A4+B4=34, ou sexa: A4 e B4: {4, 30}

De momento: A1 e B1: {24, 40}; A4 e B4: {4, 30} e D2 e D3: {1, 3}

As celdas que faltan: {8, 10, 12, 20}

Xa na liña 3, temos dúas opcións: D3 é 1 ou 3. O que significa que A3+B3 será 34 ou 32 respectivamente. Como os valores que nos faltan non permiten sumar 34, entón significa que A3+B3=32 e, por tanto, D3=3 e: A3 e B3: {12, 20} A2 e B2: {8, 10}

	A	B	C	D	
1			120	5	189
2			60	1	79
3			15	3	50
4			6	2	42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1	40	24	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	20	15	3	50
4	4	30	6	2	42
	66	82	201	11	+

Entón as hipóteses son: A1 e B1: {24, 40}; A2 e B2: {8, 10}; A3 e B3: {12, 20}; A4 e B4: {4, 30} Se A1=40, entón A2+A3+A4=26, pronto A4=4. Por tanto, A2+A3=22, entón A2=10 e A3=12. Así mesmo, B1=24, B2=8, B3=20 e B4=30.

Se B1=40, entón B2+B3+B4=42. Se B4=30, entón B2+B3=12, o que é imposible

Se B4=4, entón B2+B3=38, que tamén é imposible.

Logo, B1 non pode ser 40 neste caso.

Entón as catro posibles solucións:

	A	B	C	D	
1	40	24	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	30	6	2	50
4	4	20	15	3	42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1	24	40	120	5	189
2	8	10	60	1	79
3	30	12	6	2	50
4	4	20	15	3	42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1	24	40	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	30	6	2	50
4	20	4	15	3	42
	66	82	201	11	+

	A	B	C	D	
1	40	24	120	5	189
2	10	8	60	1	79
3	12	20	15	3	50
4	4	30	6	2	42
	66	82	201	11	+

2.- DIDO, A RAÍÑA XEÓMETRA

No ano 900 a. C. a princesa Dido foi expulsada das súas terras pola cobiza do seu irmán Pigmalión, rei de Tiro. Ela escondeuse nunha nave e despois dunha arriscada travesía chega a Numidia (nos arredores da futura Cartago). 0 rei de Numidia, Hiarbas, autorízaa, un pouco por rirse dela, a fundar un novo reino sobre as terras que poida limitar cunha pel de boi.

Dido fai cortar en finas tiras de coiro a pel do boi. Ponas unha a continuación da outra obtendo así unha lonxitude L. Enseguida elixe unha zona de beiramar rectilínea e dispón esa lonxitude L na **fronteira terrestre** do seu dominio seguindo sucesivamente as figuras 1, 2, 3, 4, 5.

Calcular, en función de L, as superficies dos diferentes dominios. Dido quere, evidentemente, un territorio de superficie máxima, cal elixirá? Cal será entón a lonxitude da costa do seu novo reino?

Figura 1

Triángulo equilátero

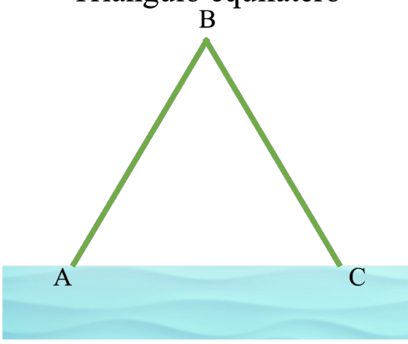


Figura 2

Rectángulo

$\overline{BC} = 2\overline{AB}$

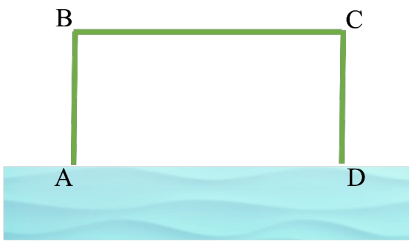


Figura 3

Cadrado

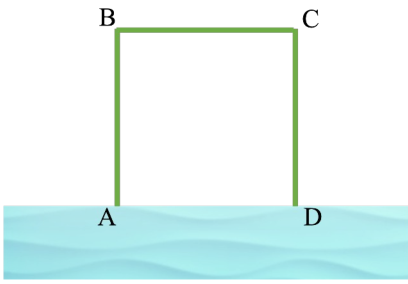


Figura 4

Semicírculo

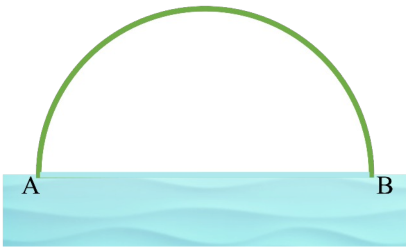
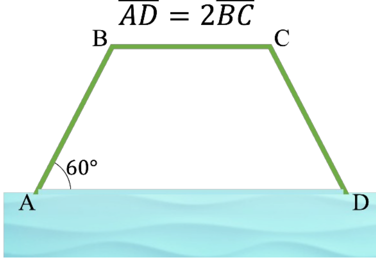


Figura 5

Trapecio isósceles

$\overline{AD} = 2\overline{BC}$



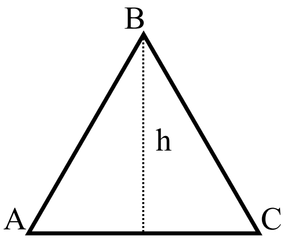
Proposta de resolución

Aportada por un grupo participante

Sabendo que as liñas verdes miden L, necesitamos saber o valor das diferentes áreas.

a) Área do triángulo equilátero:

Cada lado do triángulo mide $\frac{L}{2}$ pois o lado AC limita coa auga



$$Área = Base \times Altura$$
$$Base = AC$$

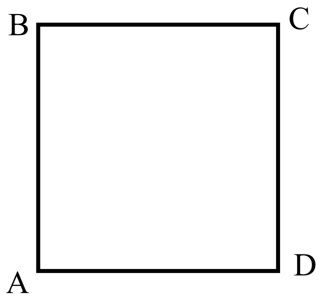
Polo Teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = BC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{L^2}{4} - \left(\frac{L}{4}\right)^2$$
$$h^2 = \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{16} \Rightarrow h^2 = \frac{3L^2}{16} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3L^2}{16}}$$
$$h = L\sqrt{\frac{3}{16}} \Rightarrow h = \frac{L}{4}\sqrt{3}$$

Agora calculamos a área: $Área = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{4} = \frac{L^2\sqrt{3}}{16}$

b) Área do cadrado:

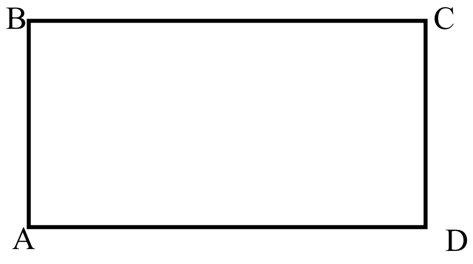
Cada lado do cadrado mide $\frac{L}{3}$ pois o lado AD limita coa auga



$$AD = \frac{L}{3} \Rightarrow Área = \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{L^2}{9}$$

c) Área do rectángulo:

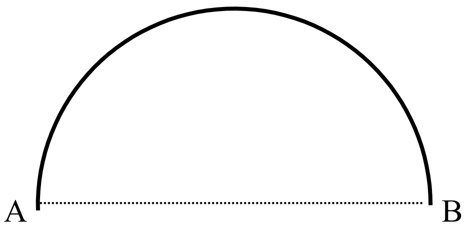
Cada lado curto do rectángulo $\frac{L}{4}$ e o lado largo $\frac{L}{2}$ pois o lado AD limita coa auga



$$BC = 2AB$$
$$A = Base \times Altura$$
$$\left.Base = BC = \frac{L}{2}\right\} \left.Altura = AB = \frac{L}{4}\right\} \Rightarrow Área = \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{L^2}{8}$$

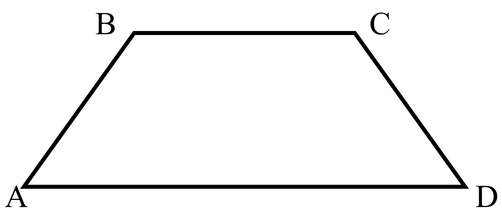
d) Área do círculo:

$r = \frac{AB}{2}$ por tanto $r = \frac{L}{\pi}$ e entón a Área é:



$$Área = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{2} = \pi \frac{L^2}{2\pi^2} = \frac{L^2}{2\pi}$$

e) Área do trapecio:



$$BC = \frac{L}{3}$$

$$Área = \frac{\frac{2L}{3} + \frac{L}{3}}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

$$Área = \frac{L^2\sqrt{3}}{12}$$

Comparando as áreas e aproximando:

Triángulo ≈ $0{,}108L$

Cadrado ≈ $0{,}111L$

Rectángulo ≈ $0{,}125L$

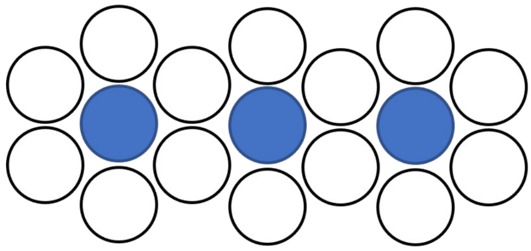
Semicírculo ≈ $0{,}159LL$

Trapecio ≈ $0{,}144L$

Así vemos que a figura com maior área é o semicírculo. Logo, Dido escollerá u território com forma de semicírculo, e o largo da costa do seu novo reino será o diámetro : $\frac{2L}{\pi}$

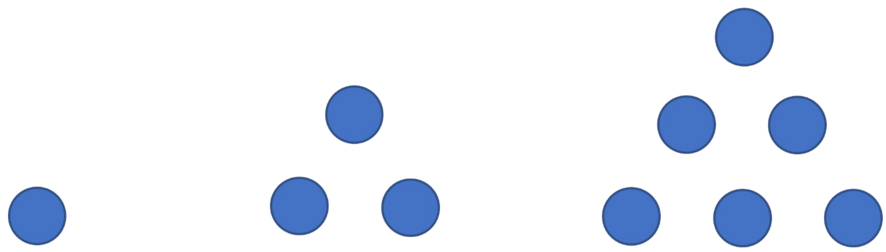
3.- OS OVOS

Un peixe pon ovos de cor e brancos seguindo un patrón. Cada ovo de cor estará rodeado por seis ovos brancos como mostra a figura:



I) Con 1 ovo de cor hai 7 ovos en total. E con 2 de cor? E con 10? E con 100?

II) O peixe deuse conta que tamén podía colocar os ovos de cor de xeito triangular: 1 ,3, 6, ... (números triangulares)



1. Debuxar como irán colocados os brancos nos tres casos indicados e cantos ovos serán en cada caso (entre brancos e de cor).

2. Debuxar o seguinte triángulo de ovos de cor. Cantos ovos terá en total?

3. Cantos ovos haberá no caso do 5º e 6º números triangulares de ovos de cor?

4. Seriades capaces de dicir os ovos totais que tería o 10º número triangular?

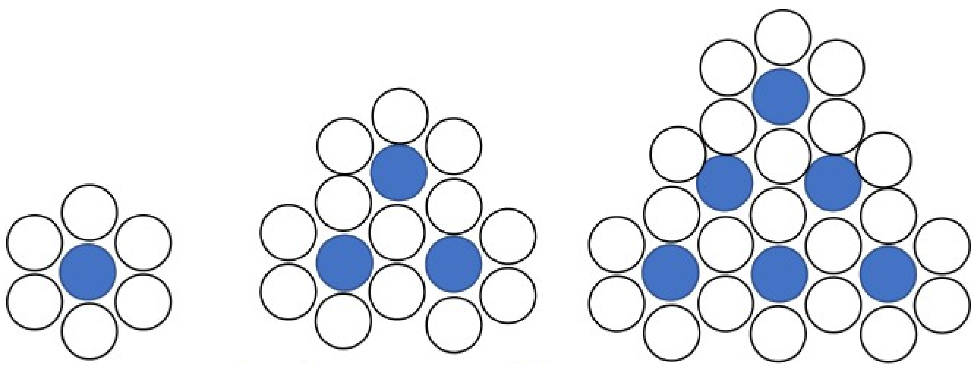
Proposta de resolución

I) Contando os ovos da figura, vemos que cada vez que aumentamos un ovo de cor aumentamos 4 branco, entón con 2 ovos de cor, teremos 12 ovos no total, e así con 3 ovos de cor teremos 17 ovos no total. Para saber cantos teremos com 10 e con 100 ovos de cor, intentaremos chegar chegar ao termo xeral:

Ovos de cor	Ocos brancos	Total
1	6	7
2	10	12
3	14	17
…	….	…
n	$4\,n+2$	$n+4n+2=5n+2$

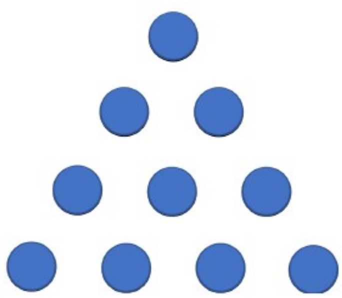
Entón, con 10 ovos de cor: $5 \cdot 10 + 2 = 52$ ovos, e con 100 ovos de cor: $5 \cdot 100 + 2 = 502$ ovos.

II)1.



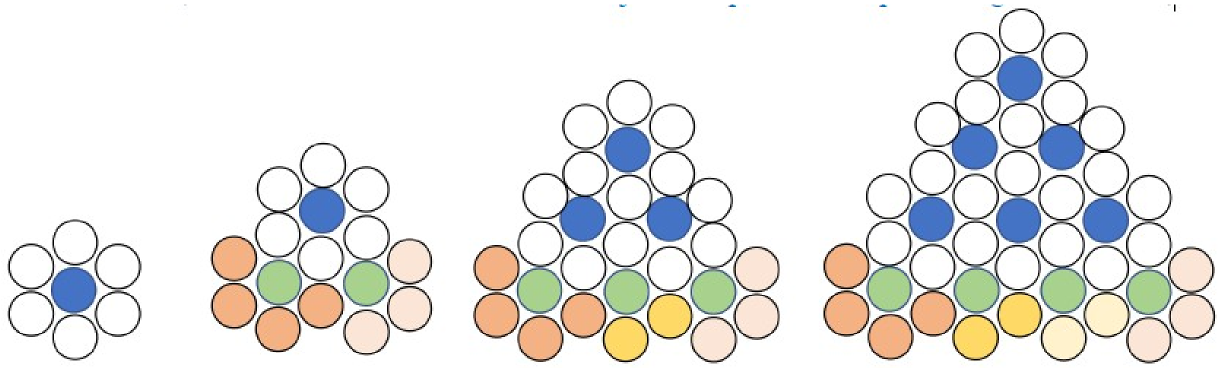
No 1º caso temos 1 ovo azul e 6 brancos, en total de 7 ovos; no 2º caso temos 3 ovos azuis e 13 brancos, en total de 16 ovos; e no 3º caso temos 6 ovos azuis e 22 brancos, en total de 28 ovos.

2.-



En total, teremos 43 ovos.

3. En cada novo termo novo, estamos engadindo unha liña por debaixo. Usamos as imaxes anteriores para atopar un patrón:



Como vemos, no primeiro termo tiñamos 1 azul e 6 brancos. No termo seguinte, engadimos 2 azuis e 4+3 brancos (3 azuis e 13 de cor branca). No terceiro termo, engadimos 3 azuis e 4 + 2 + 3 brancos (6 azuis e 22 brancos). No cuarto termo, engadimos 4 azuis e 4+2 x 2+3 brancos (10 azuis e 33 brancos). Seguindo este patrón, no quinto termo engadimos 5 azuis e 4+ 3 x 2 +3 brancos (15 azuis e 46 brancos). E no sexto termo engadimos 6 azuis e 4+4 x 2+3 brancos (21 azuis e 61 brancos).

Isto indica que cada en cada liña que engadimos o ovo da esquerda aporta 4 novos ovos brancos, os centrais aportan 2 e o da dereita aporta 3

4. Seguindo o raciocinio anterior, o sétimo termo engadirá 7 azuis e 4+ 5 x 2+ 3 brancos (106 ovos no total). O oitavo termo engadirá 8 azuis e 4+6 x 2+3 brancos (133 ovos). O noveno termo engadirá 9 ovos azuis e 4+ 7 x 2+3 brancos (163 no total). E o décimo termo engadirá 10 ovos azuis e 4+8 x 2+3 brancos (196 ovos no total).

4.- TORNEO EUROPEO CUADRANGULAR

As seleccións de fútbol de 4 países europeos, por orde alfabética Alemaña, España, Francia e Portugal, participaron nun torneo cuadrangular de fútbol a unha volta. Isto é, que cada equipo xoga unha única vez coas outras tres.

Curiosamente, os resultados dos seis partidos foron todos diferentes (por exemplo, se un partido acabou 1-0, ningún outro acabou 1-0 nin 0-1) e cada equipo obtivo unha victoria, un empate e unha derrota. Como acabaron todos co mesmo número de puntos, foi preciso desempatar pola diferenza de goles. A táboa cos 11 goles que se marcaron en total é a seguinte:

	PARTIDOS XOGADOS	GOLES A FAVOR	GOLES EN CONTRA
Portugal	3	4	2
Francia	3	2	2
España	3	3	4
Alemaña	3	2	3

Cales foron os resultados de cada partido?

Proposta de resolución

Este torneo tivo un total de 6 partidos, todos con resultados distintos, coa distribución que se pode ver na táboa (sen considerar a orde dos partidos nin a diferenza entre o equipo da casa e o visitante) :

Portugal	?	x	?	Francia
Portugal	?	x	?	España
Portugal	?	x	?	Alemaña
Francia	?	x	?	España
Francia	?	x	?	Alemaña
España	?	x	?	Alemaña

Sabemos que foron marcados 11 goles en total, e todos os equipos tiveron unha vitoria, un empate e unha derrota. Analizando os empates: 0 – 0 e 1 – 1

Démonos conta que non poderiamos ter o empate 2 – 2 (nin con máis goles), pois se así fose os dous equipos con este empate necesitarían ter máis de 2 goles marcados e recibidos, xa que terían que ter tamén unha vitoria (o que implicaba marcar polo menos un gol nese partido) e unha derrota (o que implicaba recibir polo menos un gol nese partido). Como temos só un equipo (España) con máis de 2 goles marcados e máis de 2 goles sufridos, entón non poderemos ter ningún empate 2 – 2 (ou superior) – nin podemos ter resultados en que o vencedor e o perdedor teñan máis de 2 goles marcados. Así que os dous empates son 0 – 0 e 1 – 1, o que significa que dous dos goles foron marcados neste empate. Sobran, entón, 9 goles, e como ningún equipo ten 5 ou máis goles marcados, as posibilidades son:

1 – 0 2 – 0 2 – 1 3 – 0 3 – 1

3 – 2 4 – 0 4 – 1 4 – 2

No caso de que un dos resultados fose 4 – 2, e os restantes catro partidos tivesen o mínimo de goles posible, teriamos un total de 1+2+3+3+6=15, o que non pode ser pois o máximo son 9 goles neses partidos. Polo mesmo razoamento podemos excluír os resultados 4 – 1 e 3 – 2 (1+2+3+3+5=14 goles) e os resultados 3 – 1 e 4 – 0 (1+2+3+3+4=13 goles). Por tanto as únicas posibilidades son:

0 – 0 1 – 1 1 – 0 2 – 0 2 – 1 3 – 0

Francia non pode empatar 1 – 1, pois nese caso sobraría só un gol para marcar e un para recibir nos restantes partidos, o que significa que tería que perder 0 – 1 e gañar 1 – 0, o que é impible porque non existen resultados repetidos. Entón, Francia empatou 0 – 0 con algunha dos tres equipos e as únicas hipóteses para os restantes partidos de Francia son:

Hipótese F1: 0 – 0 2 – 1 0 – 1

Hipótese F2: 0 – 0 1 – 0 1 – 2

Vexamos a **Hipótese F1**:

Francia	0	x	0	?
Francia	2	x	1	?
	?	x	?	Francia

Se Francia lle ganase 2 – 1 a Alemaña, entón a Alemaña tería un empate de 1 – 1 con un dos outros equipos. Así nestes dous partidos tería dous goles marcados e recibidos, o que non pode ser pois o outro partido tería que ser novamente un empate (0 – 0). A mesma lóxica usaríamos con España, se Francia lle gañase 2 – 1, entón España tería un empate 1 – 1 con un dos outros equipos. Así nestes dous partidos marcaría dous goles e recibido tres, o que implica que o partido que falta tería como resultado 1 – 1, que xa sabemos non é posible poiis teriamos dous resultados iguais. Logo, Francia gañou 2 – 1 a Portugal. Neste caso, se Portugal perdeu 1 – 2 con Francia, significa que empatou con un dos outros equipos 1 – 1 (visto que o empate 0 – 0 xa o ten Francia). Con isto nestes dous partidos recibiría 3 goles, o que non é posible pois Portugal só recibiiu 2 goles durante o torneo. Por tanto, a Hipótese F1 é imposible

Entón é válida a **Hipótese F2**:

Francia	0	x	0	?
Francia	1	x	0	?
	2	x	1	Francia

Como Portugal perdeu con Francia, significa que empatou 1 – 1 con un dos outros equipos. Recibindo un gol con Francia sen marcar ningún gol nese partido, e con un empate 1 – 1, significa que neses dous partidos marcou un gol e recibiu dous. Isto significa que o partido que Portugal gañou tivo como resultado 3 – 0.

Francia	0	x	0	?
Francia	1	x	0	Portugal
?	2	x	1	Francia
Portugal	1	x	1	?
Portugal	3	x	0	?

Falta incluír o resultado 2 – 0, que foi o resultado do partido entre Alemaña e España. No caso de que fose España a que gaña, significa que tería que empatar con Francia, pois o equipo que perdeu contra Francia foi Portugal. Entón España e Francia quedarían 0 – 0 , que implica que España perdese contra Portugal por 1 – 4, que é imposible. Entón Alemaña que gañou 2 – 0 a España.

Como Alemaña xa ten unha vitoria con España, significa que contra Francia ou perdeu ou empatou. Como Francia gañou a Portugal, entón non pode ganarlle tamén a Alemaña, logo Alemaña empatou con Francia e polo tanto perde contra Portugal.
Temos así

Francia	0	x	0	Alemaña
Francia	1	x	0	Portugal
?	2	x	1	Francia
Portugal	1	x	1	?
Portugal	3	x	0	Alemaña
Alemaña	2	x	0	España

Agora estamos en condicións de completar á táboa pois só falta colocar os partidos de España. Sendo o resultado final:

Francia	0	x	0	Alemaña
Francia	1	x	0	Portugal
España	2	x	1	Francia
Portugal	1	x	1	España
Portugal	3	x	0	Alemaña
Alemaña	2	x	0	España

5.- CONSECUENCIAS

Tras unha escaramuza contra as tropas do Papado, os soldados dos Médici fixeron reconto de baixas.

Dos 131 soldados dos Médici, había 112 feridos, entre eles 46 cun brazo amputado, 16 cunha perna amputada e 10 afectados por infeccións incurables. Os amputados e os infectados nunca poderán volver loitar, pero os demais poderán volver a filas nalgún momento.

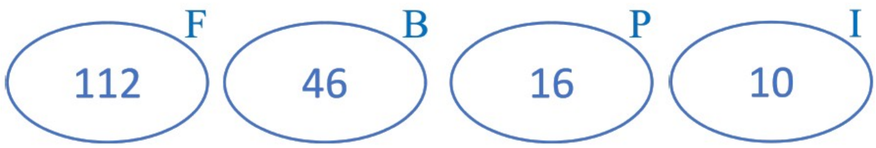
Cal é o número máximo de baixas que se recuperarán?

(Problema proposto e resolto por Leonardo da Vinci con ilustración da época)

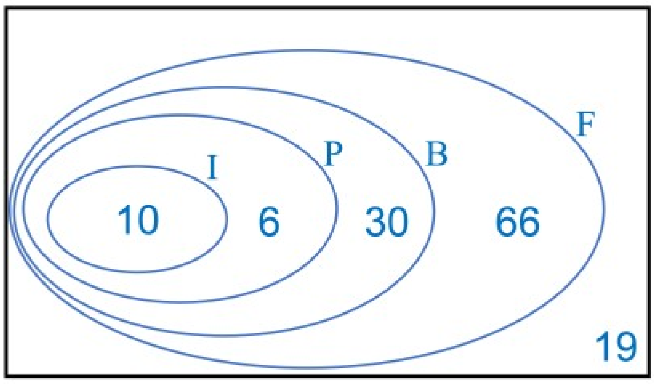
Proposta de resolución

Dos 112 soldados feridos, sabemos que 46 teñen o brazo amputado, 16 teñen unha perna amputada e 10 están con infeccións incurables. Estes tres tipos de feridos non poderán volver ao combate. Como queremos saber cal é o número máximo de feridos que poderán regresar ao combate, intentaremos concentrar todas doenzas no mínimo de persoas posbles.

Consideremos F os soldados feridos, B os soldados cun brazo amputado, P os soldados cunha perna amputada e I os soldados con infeccións incurables.



Unha forma de que estean estes conxuntos é:



Ou sexa, se asumirmos que todos os soldados con infeccións teñen unha perna amputada, e estes tamén teñen un brazo amputado, chegamos á conclusión que teremos só 46 soldados que non poderán regresar ao combate, quedando 66 soldados que se recuperarán.

Esta será unha forma de garantir o número máximo de recuperados, que será 66.

Outra posibilidade de organización dos conxuntos podería ser: